УДК 517.53

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ОЦЕНКА ОСТАТКА[1]

А. К. Рамазанов (Калуга, РФ)

akramazanov@mail.ru

Пусть функция $f(z)$ определена на системе попарно различных узлов $z_0, z_1, \ldots$ Тогда её значения в этих узлах назовем обратными разностями нулевого порядка и обозначим их через $f^-(z_k) = f(z_k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, а через $f^-(z_k, \ldots, z_s, z_n, z_l)$ обратные разности функции $f(z)$ более высокого порядка, которые определяются по рекуррентным соотношениям (см. [1]).

Рассмотрим следующую задачу: для попарно различных узлов $z_0, z_1, \ldots, z_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и заданных в них значений $f(z_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, найти рациональную функцию $R(z)$ в виде подходящей дроби n-го порядка

$$R(z) = b_0 + \frac{z - z_0}{b_1} \underset{+}{} \frac{z - z_1}{b_2} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{z - z_{k-1}}{b_k},$$

непрерывной дроби Тиле, для которой выполняются равенства

$$R(z_\nu) = f(z_\nu)\ (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Достаточное условие существования такой рациональной функции доказано [1], а необходимое условие — в [2], при этом $b_j = f^-(z_0, z_1, \ldots, z_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$. Для попарно различных узлов $z_0, z_1, \ldots, z_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ в [2] получено выражение для остатка от замены функции $f(z)$ её интерполяционной рациональной функцией $R(z)$ в виде подходящей дроби n-го порядка непрерывной дроби Тиле.

Рассмотрим теперь случай, когда все узлы интерполирования совпадают между собой.

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z = 0$ комплексной плоскости и пусть для произвольных $z_0, z_1, \ldots, z_n$ из этой окрестности определена обратная разность $f^-(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Для краткости введем обозначения предела и повторных пределов следующих видов:

$$f_n^- = \lim_{z_n \to 0} \lim_{z_{n-1} \to 0} \ldots \lim_{z_0 \to 0} f^-(z_0, z_1, \ldots, z_n);$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00952).

$$f_n^-(z) = \lim_{z_{n-1}\to 0} \lim_{z_{n-2}\to 0} \dots \lim_{z_0\to 0} f^-(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z)$$

Значит, при каждом n $(n = 0, 1, \dots)$ выполняется равенство

$$\lim_{z\to 0} f_n^-(z) = f_n^-,$$

а поэтому при условии существования $f_n^- \neq 0$ существует $\lim\limits_{z\to 0} f_n^-(z) \neq 0$.

В принятых выше обозначениях имеет место

Теорема. *Пусть для функции $f(z)$, определенной в некоторой окрестности G нуля $z = 0$, существуют отличные от нуля предельные значения обратных разностей в нуле $f_0^-, f_1^-, \dots, f_n^-, \dots$ и пусть $\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ — подходящая дробь порядка n $(n = 0, 1, \dots)$ непрерывной дроби*

$$f_0^- + \frac{z}{f_1^-} + \frac{z}{f_2^-} + \dots + \frac{z}{f_n^-} + \dots \tag{1}$$

Тогда при каждом n $(n = 0, 1, \dots)$ в каждой точке $z \in G$, в которой существует отличное от нуля значение $f_{n+1}^-(z)$, выполняется равенство

$$f(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{z^{n+1}}{f_1^-(z) \sum\limits_{m=0}^{n} (-1)^m z^{n-m} \prod\limits_{\nu=1}^{m} f_\nu^-(z) f_{\nu+1}^-(z)}. \tag{2}$$

Непостредственно из равенства (2) вытекает

Следствие. *В условиях теоремы выполняется соотношение эквивалентности*

$$f(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \sim (-1)^n \frac{f(0)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} f_\nu^- f_{\nu+1}^-} z^{n+1} \quad (z \to 0). \tag{3}$$

Отметим также, что при любом $m = 0, 1, \dots$ у подходящей дроби $\dfrac{P_{2m}(z)}{Q_{2m}(z)}$ порядка $2m$ непрерывной дроби (1) числитель $P_{2m}(z)$ и знаменатель $Q_{2m}(z)$ — полиномы относительно z степени m, а у подходящей дроби $\dfrac{P_{2m+1}(z)}{Q_{2m+1}(z)}$ порядка $2m+1$ числитель $P_{2m+1}(z)$ — полином степени $m+1$, а знаменатель $Q_{2m+1}(z)$ — полином степени m.

Следовательно, из соотношения (3) вытекает, что последовательности $\dfrac{P_{2m}(z)}{Q_{2m}(z)}$ и $\dfrac{P_{2m+1}(z)}{Q_{2m+1}(z)}$ подходящих дробей четных и нечетных порядков непрерывной дроби (3) в условиях теоремы представляют собой соответственно диагональную $\pi_{m,m}(z;f)$ и наддиагональную $\pi_{m+1,m}(z;f)$ последовательности аппроксимаций Паде функции $f(z)$ относительно точки $z=0$; при этом выполняются соотношения:

$$f(z)-\pi_{m,m}(z;f)\sim\frac{f(0)}{\prod\limits_{\nu=0}^{2m} f_\nu^- f_{\nu+1}^-}z^{2m+1}\quad(z\to 0),$$

$$f(z)-\pi_{m+1,m}(z;f)\sim-\frac{f(0)}{\prod\limits_{\nu=0}^{2m+1} f_\nu^- f_{\nu+1}^-}z^{2m+2}\quad(z\to 0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. М. : Мир, 1985.

2.*Рамазанов А.К.* О существовании интерполяционной рациональной дроби// Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, 2013. Т. 46. С. 378–380.

УДК 517.968.23

О РЕШЕНИИ НЕВЫРОЖДЕННОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. М. Расулов (Смоленск, РФ)

kahrimanr@yandex.ru

Пусть T^+ — конечная, односвязная область на плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, ограниченная замкнутым контуром Ляпунова L.

Класс аналитических в области T^+ функций $F(z)$, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающихся на контур L, будем обозначать символом $A(T^+)\cap H(L)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все аналитические в области T^+ функции $F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ класса $A(T^+)\cap H(L)$, удовлетворяющие на L условию*

$$F^+[\alpha(t)]=A(t)F^+(t)+B(t)\overline{F^+(t)}+h(t),\qquad(1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $h(t)$ — заданные на L функции класса $H\,(L)$ (Гельдера), $\alpha(t)$ — прямой или обратный сдвиг контура L, удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)]=t,\qquad(2)$$

причем $\alpha'(t)\neq 0$ и *$\alpha'(t)\in H(L)$.*