В частности, здесь можно взять функцию $\varphi(t) = t^p$, $0 < p \leqslant 1$, тогда из следствия 3 легко вывести усиление ряда результатов типа теорем Кампанато–Мейерса (см. [4] и библиографию в этой работе) и Спанне [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 14, № 2. P. 415–426.

2. *Long R., Yang L.* BMO functions in spaces of homogeneous type // Sci. Sinica, Ser. A. 1984. Vol. 27, № 7. P. 695–708.

3. *Logunov A. A., Slavin D., Stolyarov V. V., Vasyunin V., Zatitskiy P. B.* Weak integral conditions for BMO // ArXiv : 1309.6780.

4. *Иванишко И.А., Кротов В.Г., Порабкович А.И.* Обобщение теоремы Кампанато–Мейерса // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 30–35.

5. *Spanne S.* Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes // Ann. Scuola norm. super. Pisa. 1965. Vol. 19, № 4. P. 593–608.

УДК 517.54

ОЦЕНКА ШВАРЦИАНА НА КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Пчелинцев (Томск, РФ)

VPchelintsev@vtomske.ru

Пусть S_M — класс голоморфных однолистных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $w = f(z)$ таких, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и $|f(z)| < M$, $M \geqslant 1$.

Требуется найти множество D значений функционала

$$\{f, z_0\} = \frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^2$$

при фиксированном z_0, $z_0 \in U$, на классе S_M.

Известно, что множество D связно замкнуто ограничено [1, 2]. В отличие от работы [3], здесь задача решается параметрическим методом в основе которого лежит следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta\frac{\mu(\tau)+\zeta}{\mu(\tau)-\zeta},\ \zeta\big|_{\tau=0} = z,\ z \in U,$$

где $0 \leqslant \tau < M < \infty$, $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)| = 1$, — кусочно-непрерывная функция. Функция $\zeta(\tau, z) = e^{-\tau}z + ...$ однолистно и конформно отображает единичный круг в единичный круг.

В работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $f(z) \in S_M$ *и* z_0 *— фиксированная точка из круга* U*. Тогда в круге* U *справедлива точная оценка*

$$|\{f, z_0\}| + \frac{6M^2|f'(z_0)|^2}{(M^2 - |f(z_0)|^2)^2} \leqslant \frac{6}{(1-|z_0|^2)^2},$$

где знак равенства имеет место только для функций, отображающих круг U *на круг* $W = \{w \in \mathbb{C} : |w| < M\}$ *с надлежащими разрезами.*

Граничной функцией для $\{f, z_0\} \neq 0$ в точке $z_0 = 0$ является функция

$$f_M(z, \varphi, \lambda) = \frac{2z}{h(z,\varphi,\lambda) + \sqrt{h^2(z,\varphi,\lambda) - \dfrac{4}{M^2}\, e^{2i\varphi} z^2}},$$

где

$$h(z,\varphi,\lambda) = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)\cos\lambda\, e^{i\varphi} z + e^{2i\varphi} z^2$$

при $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Под радикалом понимается та непрерывная ветвь, которая обращается в единицу при $z \to 0$.

Из способа построения функции $f_M(z,\varphi,\lambda)$ следует, что она отображает круг U на круг W, из которого удалены два отрезка от точек

$$e^{-i\varphi} M^2 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)\cos\lambda \; - \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)\cos\lambda\;\right)^2 - \frac{1}{M^2}} \right\}$$

и

$$-e^{-i\varphi} M^2 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{M}\right)\cos\lambda \; - \sqrt{\left(1 - \left(1 + \frac{1}{M}\right)\cos\lambda\;\right)^2 - \frac{1}{M^2}} \right\}$$

до точек $e^{-i\varphi}M$ и $-e^{-i\varphi}M$ соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск : Том. гос. ун-т, 2001. 220 с.

2. *Александров И. А., Пчелинцев В. А.* Множество значений производной Шварца // Вестник Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2010. № 3(11). С. 5–12.

3. *Аленицын Ю. Е.* Об однолистных функциях в многосвязных областях // Матем. сб. 1956. Т. 39(81), № 3. С. 315–336.