ция $v(b,x) = x \sum\limits_{k=1}^{[\pi/x]} kb_k$ является мажорантой $g(b,x)$ на интервале $(0,\pi)$. Это означает, что

$$\bar{l}(b) = \varlimsup_{x\to 0+} \frac{g(b,x)}{v(b,x)} \leqslant 1. \qquad (1)$$

Очевидно, что в случае $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kb_k < +\infty$ верно равенство $\bar{l}(b) = 1$ и в (1) существует обычный предел. Вопрос же о точной нижней грани $\bar{l}(b)$ до сих пор оставался открытым. Из результатов работы [2] следует, что верно неравенство: $\inf\left\{\bar{l}(b)\right\} \leqslant 2\pi^{-2}$. Мы доказали, что на самом деле имеет место равенство: $\min\left\{\bar{l}(b)\right\} = 2\pi^{-2}$. Более того, нами установлена следующая оценка снизу.

Теорема. *Для любой монотонной последовательности b существует такая последовательность положительных чисел $\{x_p\}$, $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = 0$, что при всех $p \in \mathbb{N}$ верны неравенства:*

$$g\left(b, x_p\right) > 2\pi^{-2} v\left(b, x_p\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов А. Ю.* Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов // Мат. заметки. 2003. Т. 74 (6). С. 877–888.

2. *Aljančić S., Bojanić R., Tomić M.* Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients mono-tones // Publ. Inst. Math. Serbe Sci. 1956. Vol. 10. P. 101–120.

УДК 517.518.2

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДЖОНА–НИРЕНБЕРГА

А. И. Порабкович, (Минск, Беларусь),
Р. В. Шанин (Одесса, Украина)
porabkovich@bsu.by, ruslanshanin@gmail.com

Пусть (X,d,μ) — пространство с квазиметрикой d (неравенство треугольника заменяется более слабым неравенством

$$d(x,y) \leqslant a_d[d(x,z) + d(z,y)]$$

с некоторой постоянной $a_d \geqslant 1$) и σ-конечной борелевской мерой μ. Для $x \in X$ и $r > 0$

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

обозначает открытый шар с центром x радиуса r. При этом мы предполагаем, что мера любого шара положительна и конечна.

Ниже считаем, что мера μ удовлетворяет условию удвоения: существует такая постоянная $a_\mu > 0$, что

$$\mu B(x, 2t) \leqslant a_\mu \mu B(x, t), \quad x \in X, \quad t > 0.$$

Обозначим Φ — класс непрерывных строго возрастающих функций $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ со свойствами $\varphi(0) = \varphi(+0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$ и с каждой функцией $\varphi \in \Phi$ свяжем класс $\varphi(L)(E)$, состоящий из функций, для которых $\varphi \circ f \in L^1(E)$, Φ_1 — подкласс в Φ, состоящий из функций $\varphi \in \Phi$ со свойством: существует такая постоянная a_φ, что

$$\varphi(t + s) \leqslant a_\varphi[\varphi(t) + \varphi(s)], \quad t, s > 0.$$

Введем среднюю φ-осцилляцию функции $f \in \varphi(L)(B)$ по шару $B \subset X$

$$A_\varphi(f, B) = \inf_c \varphi^{-1} \left(\fint_B \varphi(|f(x) - c|) \, d\mu(x) \right),$$

классы

$$BMO_\varphi(B_0) = \left\{ f \in \varphi(L)(B_0) : \|f\|_\varphi^* \equiv \sup_{B \subset B_0} A_\varphi(f, B) < +\infty \right\},$$

и функцию

$$\mu_\varphi(f, t) \equiv \sup \left\{ A_\varphi(f, B) : B \subset B_0, \ 0 < r_B \leqslant t \right\}.$$

В случае $\varphi(t) = t^p$, $p > 0$, будем писать просто $BMO_p(B_0)$, $\|f\|_p^*$ и $\mu_p(f, t)$, кроме того, $BMO(B_0) = BMO_1(B_0)$ и $\|f\|^* = \|f\|_1^*$. Из неравенства Гельдера следует, что $BMO_q(B_0) \subset BMO_p(B_0)$ при $0 < p < q < \infty$. На самом деле $BMO_p(B_0) = BMO(B_0)$ при $p > 0$ и полунорма $\|f\|_p^*$ эквивалентна полунорме $\|f\|^*$.

Легко видеть, существует такое число $I_B f = I_B^\varphi f \in \mathbb{R}$, что

$$A_\varphi(f, B) = \varphi^{-1} \left(\fint_B \varphi(|f(x) - I_B^\varphi f|) \, d\mu(x) \right).$$

Теорема 1. *Пусть заданы функция* $\varphi \in \Phi_1$, *шар* $B_0 \subset X$, $f \in BMO_\varphi(B_0)$, $\Lambda > 1$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\mu\{x \in B_0 : \ |f(x) - I_{B_0}^\varphi| > \lambda\} \leqslant A\mu(B_0) \exp(-a\lambda), \quad \lambda > 0.$$

Здесь
$$a = \frac{\ln \Lambda}{\varphi^{-1}\Big(a_\varphi(1+c\Lambda)\varphi(\|f\|^*_\varphi)\Big)}, \quad A = c\Lambda,$$
где c зависит лишь от a_d и a_μ.

Теорема 1 обобщает известное неравенство Джона–Ниренберга [1] (случай $\varphi(t) = t$ нашей теоремы).

Следствие 1. *Пусть функция $\varphi \in \Phi_1$, шар $B_0 \subset \mathbb{R}$ и функция $f \in \in BMO_\varphi(B_0)$. Тогда $f \in BMO(B_0)$ и*
$$\|f\|^* \leqslant 2\left(1 + \frac{1}{\ln \Lambda}\right)\varphi^{-1}(a_\varphi\,(1+c\Lambda)\,\varphi(\|f\|^*_\varphi)).$$

На самом деле, если не заботиться об оценке для $\|f\|^*$, то утверждение следствия 1 справедливо при более широких условиях на функцию φ.

Следствие 2. *Пусть $B_0 \subset X$ и возрастающая функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty$. Тогда*
$$BMO_\varphi(B_0) \subset BMO(B_0).$$

Близкие результаты, но при более жестких ограничениях на функцию φ, были доказаны в [2].

Во время работы над результатами, приведенными выше, появилась также статья [3]. В ней рассматривался случай $X = \mathbb{R}^n$, μ — мера Лебега и $d(x,y) = \max\{|x_k - y_k| : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ и были получены результаты, близкие к следствиям 1 и 2. Метод работы [3] отличен от нашего и не связан с неравенством Джона–Ниренберга. Существенным отличием наших результатов от утверждений работы [3] является то, что в ней роль $A_\varphi(f,B)$ играет величина
$$\varphi^{-1}\left(\fint_B \varphi\left(\left|f(x) - \fint_B f(y)\,dy\right|\right)\,dx\right).$$
Поэтому в [3] рассматривались лишь функции $f \in L^1(B_0)$.

Следствие 3. *Пусть функция $\varphi \in \Phi_1$, шар $B_0 \subset \mathbb{R}$ и функция $f \in \in BMO_\varphi(B_0)$. Тогда $f \in BMO(B_0)$ и*
$$\mu_1(f,t) \leqslant 2\left(1 + \frac{1}{\ln \Lambda}\right)\varphi^{-1}(a_\varphi\,(1+c\Lambda)\,\varphi(\mu_\varphi(f,t))),$$

В частности, здесь можно взять функцию $\varphi(t) = t^p$, $0 < p \leqslant 1$, тогда из следствия 3 легко вывести усиление ряда результатов типа теорем Кампанато–Мейерса (см. [4] и библиографию в этой работе) и Спанне [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 14, № 2. P. 415–426.

2. *Long R., Yang L.* BMO functions in spaces of homogeneous type // Sci. Sinica, Ser. A. 1984. Vol. 27, № 7. P. 695–708.

3. *Logunov A. A., Slavin D., Stolyarov V. V., Vasyunin V., Zatitskiy P. B.* Weak integral conditions for BMO // ArXiv : 1309.6780.

4. *Иванишко И.А., Кротов В.Г., Порабкович А.И.* Обобщение теоремы Кампанато–Мейерса // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 30–35.

5. *Spanne S.* Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes // Ann. Scuola norm. super. Pisa. 1965. Vol. 19, № 4. P. 593–608.

УДК 517.54

ОЦЕНКА ШВАРЦИАНА НА КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Пчелинцев (Томск, РФ)
VPchelintsev@vtomske.ru

Пусть S_M — класс голоморфных однолистных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $w = f(z)$ таких, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и $|f(z)| < M$, $M \geqslant 1$.

Требуется найти множество D значений функционала

$$\{f, z_0\} = \frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^2$$

при фиксированном z_0, $z_0 \in U$, на классе S_M.

Известно, что множество D связно замкнуто ограничено [1, 2]. В отличие от работы [3], здесь задача решается параметрическим методом в основе которого лежит следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta\frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta},\ \zeta\big|_{\tau=0} = z,\ z \in U,$$

где $0 \leqslant \tau < M < \infty$, $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)| = 1$, — кусочно-непрерывная функция. Функция $\zeta(\tau, z) = e^{-\tau}z + \ldots$ однолистно и конформно отображает единичный круг в единичный круг.