Теорема 2. *Пусть* $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$. *Тогда для любой функции* $f \in C[0,1]$ *её ряд Фурье по системе* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к* f *равномерно на* $[0,1]$. *Кроме того, при* $2^k - 1 \leqslant N \leqslant 2^{k+1}$ *справедлива оценка*

$$\|f(x) - S_N(f,x)\|_{C[0,1]} \leqslant 3\omega(f, r_k).$$

Теорема 3. *Пусть* $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$ *и* $p \in [1,\infty)$. *Тогда система* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является базисом в пространстве* $L^p[0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : АФЦ, 1999.

2. *Лукашенко Т. П.* Рекурсивные ряды Фурье–Стилтьеса // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зим. шк. Саратов, 2012. С. 108–109.

УДК 517.9

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ И ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ РАЗНОСТИ ДВУХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Е. С. Половинкин (Долгопрудный, Россия)
polovinkin@mail.mipt.ru

Введение. При исследовании негладких непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}^1$ на локальный минимум или максимум в некоторой точке $x_0 \in X$ приходим к тому, что необходимое условие экстремума принимает вид включения: $0 \in \partial_C f(x_0)$, где $\partial_C f(x_0)$ означает субдифференциал Кларка. В более сложных задачах математической теории управления также возникает необходимость вычисления субдифференциалов типа субдифференциала Кларка. Однако вычисление этих субдифференциалов для негладкой и невыпуклой функции является не простой задачей. В докладе, опираясь на аппарат вычисления производных от многозначных отображений, получены формулы различных производных по направлениям первого порядка, а с ними и различных субдифференциалов, включая субдифференциал Кларка, для липшицевых функций, которые представимы в виде разности двух сильно регулярных выпуклых функций.

1. Пусть X, Y — банаховы пространства. Через $B_r(x_0)$ обозначаем открытый шар с центром в точке x_0 радиуса $r > 0$ в пространстве

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. и РФФИ (проект 13-01-00295).

X. Разностью Минковского двух множеств из X называется множество вида $A \stackrel{*}{-} B \doteq \{x \in X \mid x + B \subset A\}$. Обозначим через $\mathcal{P}(Y)$ ($\mathcal{F}(Y)$) множество всех непустых (замкнутых) подмножеств из Y. Следуя [1], [2], для отображения $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ в заданной точке его графика $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\operatorname{graph} F}$ определим производную как многозначное отображение $DF(z_0)\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, графиком которого является некоторый касательный конус к графику данного отображения в точке (x_0, y_0). Известно несколько видов касательных конусов для невыпуклых множеств. Среди них следует отметить *нижний касательный конус* $T_L(A; a)$ (см. [3]), *верхний касательный конус (иначе называют: контингентный конус* $T_U(A; a)$ (см. [1])) и *касательный конус Кларка* $T_C(A; a)$ (см. [4]). Также нам потребуются следующие касательные конусы, определенные в работе [5].

Первым асимптотическим нижним (первым асимптотическим верхним) касательным конусом ко множеству $A \subset X$ *в точке* $a \in \in \overline{A}$ *назовем множество* $T_{AL1}(A; a) \doteq T_L(A; a) \stackrel{*}{-} T_L(A; a)$ $(T_{AU1}(A; a) \doteq \doteq T_U(A; a) \stackrel{*}{-} T_U(A; a))$.

Вторым асимптотическим нижним касательным конусом ко множеству A *в точке* $a \in \overline{A}$ *назовем множество* $T_{AL2}(A; a) \doteq \doteq T_{AL1}(A; a) \bigcap T_{AU1}(A; a)$.

Вторым асимптотическим верхним касательным конусом ко множеству A *в точке* $a \in \overline{A}$ *назовем множество*

$$T_{AU2}(A; a) \doteq \overline{T_{AL1}(A; a) + T_{AU1}(A; a)}.$$

Теорема 1. [6] *Конусы* $T_C(A; a)$, $T_{AL1}(A; a)$, $T_{AL2}(A; a)$, $T_{AU1}(A; a)$ *и* $T_{AU2}(A; a)$ *выпуклы, замкнуты и справедливы включения*

$$T_C(A; a) \subset T_{AL2}(A; a) \subset T_{AL1}(A; a) \subset T_{AU2}(A; a) \subset T_U(A; a).$$

Определение 1. [5] *M-производной, где* $M \in \{U, L, C, AL1, AL2, AU1, AU2\}$, *отображения* $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ *в точке замыкания его графика* $z_0 \in \overline{\operatorname{graph} F} \subset Z \doteq X \times Y$ *назовём отображение* $D_M F(z_0)$: $X \to \mathcal{F}(Y)$ *вида*

$$D_M F(z_0)(u) \doteq \{v \in Y \mid (u, v) \in T_M(\operatorname{graph} F; z_0)\}, \quad \forall\, u \in X.$$

2. Для функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ определим его *эффективное множества* $\operatorname{dom} f \doteq \{x \in X \mid f(x) \neq \pm\infty\}$ и *надграфик* $\operatorname{epi} f \doteq \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \alpha \geqslant f(x),\ x \in \operatorname{dom} f\}$.

Определение 2. [5] *M-эпипроизводной,* где $M \in \{U,\, L,\, C,\, AL1,\, AL2,\, AU1,\, AU2\}$, *функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ по направлению $u \in X$* назовем

$$D^+_M f(x_0)(u) \doteq \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid (u,\alpha) \in T_M(\operatorname{epi} f; (x_0, f(x_0)))\}.$$

Теорема 2. [6] *Для липшицевой функции $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ справедливы формулы:*

$$D^+_U f(x_0)(u) = \liminf_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}(f(x_0+\lambda u) - f(x_0)),$$

$$D^+_L f(x_0)(u) = \limsup_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}(f(x_0+\lambda u) - f(x_0)),$$

$$D^+_C f(x_0)(u) = \limsup_{\substack{\lambda, x:\\ \lambda \to 0, x \to x_0}} \lambda^{-1}(f(x+\lambda u) - f(x)),$$

$$D^+_{AL1} f(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(D^+_L f(x_0)(u+w) - D^+_L f(x_0)(w)),$$

$$D^+_{AU1} f(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(D^+_U f(x_0)(u+w) - D^+_U f(x_0)(w)),$$

$$D^+_{AL2} f(x_0)(u) = \max(D^+_{AL1} f(x_0)(u); D^+_{AU1} f(x_0)(u)),$$

$$D^+_{AU2} f(x_0)(u) = \inf_{v \in X}(D^+_{AU1} f(x_0)(v) + D^+_{AL1} f(x_0)(u-v)).$$

Кроме этого, также известна эпипроизводная П. Мишель и Ж.-П. Пено (см. [7]), которая определяется по формуле

$$D^+_{MP} f(x_0)(u) \doteq \sup_{w \in X}\{\limsup_{\lambda \to 0}(\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda(u+w)) - f(x_0+\lambda w)))\}.$$

Лемма 1. *Пусть функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ локально липшицева в окрестности точки $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Тогда для любого $M \in \{C, MP,\, AL1, AL2,\, AU1, AU2\}$ функция $u \to D^+_M f(x_0)(u)$ является выпуклой положительно однородной функцией.*

Лемма 2. *Для липшицевых функций справедливы соотношения*

$$+\infty \geqslant D^+_C f(x_0)(u) \geqslant D^+_{MP} f(x_0)(u) \geqslant D^+_{AL2} f(x_0)(u) \geqslant$$

$$\geqslant D^+_{AL1} f(x_0)(u) \geqslant D^+_{AU2} f(x_0)(u) \geqslant D^+_U f(x_0)(u) \geqslant -\infty,$$

причем неравенства могут быть строгими.

Определение 3. Для любого $M \in \{C, MP, AL1, AL2, AU1, AU2\}$ *M-субдифференциалом функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$* называется следующее множество в сопряжённом с X пространстве X^*

$$\partial^+_M f(x_0) \doteq \{p \in X^* \mid \langle p, x\rangle \leqslant D^+_M f(x_0)(x),\ \forall\, x \in X\}$$

Лемма 3. *Для липшицевых функций справедливы соотношения*

$$\partial^+_C f(x_0) \supset \partial^+_{MP} f(x_0) \supset \partial^+_{AL2} f(x_0) \supset \partial^+_{AL1} f(x_0) \supset \partial^+_{AU2} f(x_0),$$

причем включения могут быть строгими.

Теорема 3 [6]. *Для липшицевой функции $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ с константой Липшица $l > 0$ и для любого $M \in \{C, MP, AL1, AL2, AU1, AU2\}$ функция $u \to D^+_M f(x_0)(u)$ является положительно однородной, выпуклой, конечной при всех $u \in X$ и удовлетворяющей условию Липшица на пространстве X с той же константой $l > 0$.*

Предложение 1 [Ф. Кларк] (см. [4]) *Пусть функция $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ выпукла и липшицева. Тогда эписубдифференциал Кларка этой функции в точке x_0 совпадает с субдифференциалом этой функции в смысле выпуклого анализа, а ее эпипроизводная Кларка $D^+_C f(x_0)(\cdot)$ совпадает с классической производной по направлениям $f'(x_0, \cdot)$.*

Теорема 4 [6]. *Пусть непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ имеет конечную классическую производную по направлениям, т.е.*

$$f'(x_0, u) = D^+_L\ f(x_0)(u) = D^+_U\ f(x_0)(u), \quad \forall u \in X.$$

Тогда эпипроизводные $D^+_M\ f(x_0)(u)$ при $M \in \{MP, AL1, AL2, AU1, AU2\}$ совпадают между собой при каждом $u \in X$, и для них справедлива формула

$$D^+_M f(x_0)(u) = \sup_{w\in X} (f'(x_0, u + w) - f'(x_0, w)).$$

Теорема 5 [6]. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ локально липшицева в окрестности точки $x_0 \in X$ и представима в этой окрестности в виде разности локально липшицевых выпуклых функций, т. е. $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1, f_2 : B_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}^1$ - ограниченные выпуклые функции, причем для некоторого $u \in X$ одна из функций f_k, $k \in \overline{1, 2}$, удовлетворяет равенству $f'_k(x_0, u) + f'_k(x_0, -u) = 0$ (например, эта функция дифференцируема в точке x_0 по Гато). Тогда при этом $u \in X$ эпипроизводные $D^+_M\ f(x_0)(u)$ при всех $M \in \{C, MP, AL1, AL2,\ AU1, AU2\}$ совпадают между собой, и справедлива формула*

$$D^+_M f(x_0)(u) = f'_1(x_0, u) + f'_2(x_0, -u).$$

Лемма 4. *Пусть задана положительно однородная липшицева (быть может невыпуклая) функция $h : X \to \mathbb{R}^1$. Тогда справедливо равенство эпипроизводных $D^+_M\, h(0)(u)$ при всех $M \in \{C, MP, AL1, AL2, AU1, AU2\}$, а именно справедлива формула их вычисления*

$$D^+_M h(0)(u) = \sup_{w \in X}(h(u+w) - h(w)),\ \forall u \in X.$$

Следствие 1. *Пусть заданы две выпуклые ограниченные функции $f_k : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$, $k \in \overline{1,2}$. Определим функцию $f(x) \doteq f_1(x) - f_2(x)$ при $x \in B_r(x_0)$ и функции $g_k(x) \doteq f_k(x_0) + f'_k(x_0, x - x_0)$ и $g(x) \doteq g_1(x) - g_2(x)$ при $x \in X$. Тогда справедливо равенство всех $M-$ эпипроизводных функции g в точке x_0 при $M \in \{C, MP, AL1, AL2,\ AU1, AU2\}$, причем*

$$D^+_M g(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)),\ \forall u \in X.$$

Для произвольной непрерывной функции $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$, имеющей конечные производные по направлениям в некоторой точке x_0, определим функции g и φ по формулам

$$g(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0, x - x_0), \quad \varphi(x) \doteq f(x) - g(x), \tag{1}$$

Определение 4. Непрерывная функция $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ называется *сильно регулярной в точке* x_0, если она имеет конечные производные по направлениям в точке x_0 и для соответствующей функции φ (см. (1)) справедливо равенство $\partial^+_C \varphi(x_0) = \{0\}$.

Теорема 6 [6]. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ представима в виде разности двух выпуклых сильно регулярных в точке x_0 функций f_1 и f_2, т.е. $f = f_1 - f_2$. Тогда справедливо равенство всех эпипроизводных, т. е. $\forall\ M \in \{C, MP, AL1, AL2, AU1,\ AU2\}$*

$$D^+_M f(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)), \quad \forall u \in X,$$

что равносильно равенству всех эписубдифференциалов

$$\partial^+_C f(x_0) = ... = \partial^+_{AU2} f(x_0).$$

Пример 1. На полосе $P \doteq \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_2| \leqslant 1\}$ определим функции $h : P \to \mathbb{R}^1$ вида $h(x) \doteq |x_1| - \sqrt{1 - x_2^2}$ и $f(x) = \max\{h(x); 0\}$. Пусть $x_0 \doteq (1, 0)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) \doteq f(x) - f(x_0) - f\,'(x_0, x - x_0).$$

Очевидно, что $\varphi'(x_0,u)=0$ и $D^+_{MP}\varphi(x_0)(u)=0$ при всех u. Пусть $v \doteq$ $\doteq (1,0)$.

$$D^+_C\varphi(x_0)(v)=\limsup_{y\to x_0,\,t\to 0}\left(\frac{\varphi(y+tv)-\varphi(y)}{t}\right)=$$

$$=\limsup_{y\to x_0,\,t\to 0}\left(\frac{f(y+tv)-f(y)}{t}-\frac{f'(x_0,y+tv-x_0)-f'(x_0,y-x_0)}{t}\right).$$

Заметим, что $f(x)=0$ при любом $x\in B_1(0)$. Поэтому $f'(x_0,u-x_0)=0$ для всех u таких, что $\langle x_0,u-x_0\rangle<0$. Определим последовательность

$$y_k \doteq \left(1-\frac{1}{2k^2},\ \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2k^2}\right)^2}\right).$$

Очевидно, что при $t_k \doteq \frac{1}{4k^2}$ справедливо $\langle x_0, y_k+t_kv-x_0\rangle<0$. Поэтому для любого $k\in\mathbb{N}$

$$f'(x_0,y_k+t_k v-x_0)=0;\quad f'(x_0,y_k-x_0)=0;\quad \frac{f(y_k+t_k v)-f(y_k)}{t_k}=1.$$

Отсюда

$$D^+_C\varphi(x_0)(v)\geqslant \lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(y_k+t_k v)-\varphi(y_k)}{t_k}=1>D^+_{MP}\varphi(x_0)(v)=0.$$

Это доказывает, что выпуклая функция f не является сильно регулярной в точке $x_0=(1,0)$.

Следствие 1. *Последний пример показывает, что условие сильной регулярности в теореме 5 по существу. Если для построенной в примере 1 функции f рассмотреть выпуклые функции $f_1 \doteq f$ и $f_2(x)\doteq f(x_0)+f'(x_0,x-x_0)$, то получаем пример, в котором эпипроизводная (субдифференциал) Кларка в точке x_0 функции $\varphi(x)$, являющейся разностью этих двух выпуклых функций, не совпадает с эпипроизводной (субдифференциалом) Мишеля–Пено этой функции.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aubin J.P.* Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions // Advances in Math. Suppl. Studies. Acad. Press, 1981. P. 160–272.

2. *Половинкин Е.С.* Теория многозначных отображений. М. : Изд-во МФТИ, 1983. 108 с.

3. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.

4. *Clarke F.H.* Optimization and nonsmooth analysis. N.Y. : Wiley–Interscience, 1983.

5. *Половинкин Е.С.* О необходимых условиях оптимальности решений дифференциальных включений на отрезке // Совр. матем. в физ.-техн. задачах. М. : Изд-во МФТИ, 1986. С. 87–94.

6. *Половинкин Е.С.* О некоторых свойствах производных многозначных отображений // Тр. МФТИ. 2012. Т. 4, № 4. С. 141–154.

7. *Michel P., Penot J.-P.* Calcul sous-différentiel pour les fonctions lipschitziennes et non-lipschitziennes // C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. I. 1984. Vol. 298. P. 269–272.

УДК 514.772.2+517.97

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ[1]

Н. М. Полубоярова (Волгоград, РФ)
nmedv@mail.ru

В современной практике проектирования и производства существует ряд изделий и сооружений, такие как тентовые конструкции, полимерные конструкции, которые имеют неоспоримое преимущество при перекрытии больших открытых площадей (корты, бассейны, кафе и пр.). Но они чрезвычайно трудно поддаются проектированию и анализу в силу слабой разработанности соответствующего математического аппарата. Рядом авторов подчеркивалось, что наиболее предпочтительной формой поверхностей для тентовых тканевых конструкций, являются поверхности минимальной площади [1]. Такие архитектурные сооружения имеют привлекательный внешний вид, они оптимальны в минимальном расходе материалов при строительстве и в уменьшении теплообмена с окружающей средой.

Задача, которая стоит перед математиками — это обеспечить архитекторов и проектировщиков удобными методами нахождения областей устойчивости описанных поверхностей, учитывая при этом как нагрузки на них извне, так и процессы возникающие внутри, например, как в [2]. Для этого потребовалось рассматривать поверхности, «минимальные» с точки зрения более сложных функционалов, чем давно изучаемые функционалы площади. Например, функционал (энергия) может быть комбинацией энергии поверхностного натяжения, гравитационной энергии, энергии изгибной деформации. С помощью таких «обобщенных»

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-97034 — р_поволжье_а).