В работе получены условия несуществования на модельных многообразиях целых положительных решений неравенства (1).

**Теорема 1.** *Пусть* $C_\omega = \lim\limits_{\xi\to+\infty} \xi A(\xi) < \infty$. *Тогда*

*1) если многообразие* $M_q$ *таково, что* $C_S = \infty$, *то для всех* $\lambda > 0$ *на* $M_q$ *не существуют целых положительных решений неравенства* (1);

*2) если многообразие* $M_q$ *таково, что* $C_S < \infty$, *то найдется* $\lambda_0 > 0$ *такое, что для всех* $0 < \lambda \le \lambda_0$ *на* $M_q$ *существуют целые положительные решения неравенства* (1).

**Теорема 2.** *Пусть* $C_\omega = \lim\limits_{\xi\to+\infty} \xi A(\xi) = \infty$. *Тогда на* $M_q$ *для любого* $\lambda > 0$ *существуют целые положительные решения неравенства* (1).

Данные результаты дополняют результаты, полученные в работе [1] для $M_q$, и обобщают результаты работ [2], [3] для $\mathbf{R}^n$.


СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Об асимптотическом поведении положительных решений некоторых квазилинейных неравенств на модельных римановых многообразиях // Уфим. мат. журн. 2013. Т. 5. № 1. С. 83–89.

2. *Naito Y., Usami H.* Entire solutions of the inequality div $(A(|Du|)Du) \ge$ $\ge f(u)$ // Math. Z. 1997. № 255. С. 167–175.

3. *Kusano T., Swanson C. A.* Radial entire solutions of a class of quasilinear elliptic equations // J. of Diff. Equation. 1990. № 83. P. 379–399.



УДК 517.53


## ОТОБРАЖЕНИЯ С $s$-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ И $Q$-ГОМЕОМОРФИЗМ


**А. Н. Малютина (Томск, РФ)**

nmd@math.tsu.ru


Объект исследования — негомеоморфные пространственные отображения, заданные на произвольной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, называемые далее отображениями с $s$-усредненной характеристикой.

В последнее десятилетие XX века и до настоящего времени интенсивно изучаются различные отображения с конечным искажением [1]–[4], естественным образом обобщающие конформные, квазиконформные и квазирегулярные отображения. Во всех этих обобщениях, как и в классической теории, модульная техника играет ключевую роль. Имея в виду такую ее значимость, О. Мартио предложил следующую общую концепцию — теорию $Q$-гомеоморфизмов, основы которой были заложены, начиная с работы [5], а в работе [6] концепция $Q$-гомеоморфизмов была распространена на отображения с ветвлением, так называемые $Q$-отображения. Отображения с s-усредненной характеристикой — негомеоморфные пространственные отображения, введенные в работе [7], являются естественным обобщением класса отображений с искажением, ограниченным в среднем на случай произвольной области $D \subset R^n$, $n \geqslant 3$. В то же время теорема об оценке модуля, доказанная нами, указывает на непосредственную связь исследуемых отображений с вышеназванными классами гомеоморфизмов.

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W^1_{n,\ \mathrm{loc}}(D)$. Якобиан отображения $J(x, f) \neq 0$ и сохраняет знак почти всюду в $D$ (для определенности возьмем $J(x, f) > 0$), $s > (n-1)^{-1}$.

**Определение 1.** Отображение $f$ называется *отображением с s-усредненной характеристикой*, если 1) $f \in \widetilde{W}^1_{n,\ \mathrm{loc}}(D)$; 2) Существует постоянная $K_{0,s} \geqslant 0$ такая, что выполняется

$$K_{0,s}(f) = \left(\int\limits_D K_0^s(x, f) d\sigma_x\right)^{1/s} \leqslant K_{0,s}, \quad K_0(x, f) = L^n(x, f)|J(x, f)|^{-1}$$

— внешняя дилатация отображения $f$ в точке $x$,

$$L(x, f) = |f'(x)| = \max_{|h|=1} |f'(x)h|, \quad d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} \quad [7].$$

Борелевская функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\ \infty]$ называется допустимой для семейства кривых $\Gamma$ в $\mathbb{R}^n$, пишем $\rho \wedge \Gamma$, если $\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \geqslant 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Модуль семейства $\Gamma$ определяется равенством $M(\Gamma) = \inf\limits_{\rho\wedge\Gamma} \int\limits_\Gamma \rho^n(x) dm(x)$ [5], [6].

**Определение 2.** Пусть $D$ — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $Q\colon D \to$ $\to [1,\ \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ называется *$Q$-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leqslant \int\limits_D Q(x)\rho^n(x) dm(x), \qquad (1)$$

для любого семейства $\Gamma$ путей в $D$ и любой допустимой функции $\rho$ для $\Gamma$, здесь $dm(x)$ — $n$-мерная мера Лебега, $\rho$ — произвольная неотрицательная борелевская функция, такая, что произвольная кривая $\gamma$ семейства

$\Gamma$ имеет длину, не меньшую 1 в метрике $\rho$. Здесь непрерывность отображений понимается относительно сферической (хордальной) метрики [4]–[6].

**Теорема 1** (об оценке модуля). *Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ —- отображение с $s$-усредненной характеристикой. Тогда выполняется неравенство*

$$M(\Gamma^*)\leqslant\inf_{\rho\wedge\Gamma}\int\limits_D(\rho(x))^n K_I(x,f)d\sigma_x, \tag{2}$$

*где $\Gamma$ — некоторое семейство кривых, в области $D$, $\Gamma^*$ -– образ семейства $\Gamma$ при отображении $f$.*

Эта теорема доказана для отображений с $s$-ограниченным искажением в [9].

**Теорема 2.** *Пусть $f\colon D\to D^*$ — отображение с $s$-усредненной характеристикой. Тогда для всякой точки $x_0\in D$ и точки $x\in B^n(x_0,d)$, $d=\rho(x_0,\partial D)$ справедлива следующая оценка $|f(x)-f(x_0)|\leqslant\leqslant\lambda R^*e^{-t(x,x_0)}$, где $R^*=R\left(f(x_0),f[B^n(x_0,d)]\right)$, $\lambda$ — некоторая величина, зависящая только от $t(x,x_0)=\left[\omega_{n-1}^{-1}\int\limits_D r^n(|x-x_0|,y)K_I(y,f)d\sigma_x\right]^{\frac{1}{1-n}}$, и $r(t,y)$ — произвольная метрика, допустимая для семейства $\Gamma\left([0,\ t],S^n(s_0,d);B^n(x_0,d)\right)$, $0<t<d$.*

**Теорема 3.** *Пусть $f$ — отображение с $K_{I,s}$-усредненной характеристикой, $f$ отображает шар $B^n$ на себя, $f(0)=0$ и $K_{I,f}(0,t)\leqslant\leqslant\left(\frac{\ln c}{t}\right)^{\alpha(n-1)}$, где $0<\alpha<1$, $0<t<1$, $c\geqslant e$. Тогда $|f(x)|\leqslant\lambda|x|^{g(c,|x|)}$, $g(c,|x|)=\left[\beta\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-1}\left(\left(\frac{\ln c}{|x|}\right)^{\beta}-(\ln c)^{\beta}\right)\right]^{\frac{1}{n-1}}$, $\beta=\alpha(n-1)+1$.*

Необходимо отметить, что неравенство вида (1) является ключевым условием в определении более общего класса пространственных отображений, упоминавшегося выше, – класса $Q$-гомеоморфизмов.

**Пример 1.** Пусть $D\subset\mathbb{R}^3$ — область, определенная следующим образом, где $0<\beta\leqslant 2$. Рассмотрим отображение $f\colon D\to D^*$, $0<\alpha<1$,

$$f(x)=\left\{y\in\mathbb{R}^3;\ y_1=x_1,\ y_2=\frac{x_2}{|x_1|+1},\ y_3=x_3(|x_1|+1)^{1-\alpha}\right\},$$

где

$$D^*=\left\{y\in\mathbb{R}^3;\ -\infty<y_1<+\infty,\ 0\leqslant y_2<|x_1|^{\beta},\ 0\leqslant y_3<+\infty\right\}.$$

Построенный нами пример, показывает, что класс отображений является отображением с $s$-усредненной характеристикой, следовательно, класс исследуемых отображений не пуст, и не является отображением с ограниченным искажением, а также что построенное отображение $f$ не является $Q$-гомеоморфизмом, несмотря на то, что в данной работе удалось установить оценку модуля типа (2) с подходящей мажорантой $Q(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Iwaniec T., Šverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 118. P. 181–188.

2. *Astala K., Iwaniec T., Koskela P., Martin G.* Mappings of BMO-bounded distortion // Math. Annalen. 2000. Vol. 317. P. 703–726.

3. *Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: capacity and modulus inequalities // Dept. Math. Stat. University of Jyväskylä. Pre-print 257. 2002. P. 1–32.

4. *Игнатьев А. А., Рязанов В. И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Український математичний вісник. 2005. Т. 2, № 3. С. 395–417.

5. *Мартио О., Рязанов В., Сребро У., Якубов Э.* К теории $Q$-гомеоморфизмов // Докл. АН. 2001. Т. 381, № 1. С. 20–22.

6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. 2004. Vol. 93. P. 215–236.

7. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* Дифференциальные свойства отображений с $s$-усредненной характеристикой // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2008. № 4(8). С. 124–129.

8. *Малютина А. Н. Елизарова М. А.* Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 121 с.

9. *Малютина А. Н.* Поведение $s$-ограниченных отображений в окрестности изолированной особой точки. Исследования по математическому анализу и алгебре : сб. статей. Томск : Томский государственный университет. 2000. Вып. 2. С. 77–86.

УДК 517.51

# СВЯЗЬ РАВНОМЕРНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ И КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ С СОПРЯЖЁННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

**Т. С. Мардвилко, А. А. Пекарский (Минск, РБ)**
mardvilko@mail.ru, pekarskii@gmail.com

Как известно (см., например, [1]), между рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями функций существует тесная связь.