и тем самым имеет место (2), где $K(x,t) = \dfrac{1}{2}K_1\left(x, \dfrac{x-t}{2}\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I // Тр. ММО. 1952. Т. 1. С. 327–420.

2. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наукова думка, 1977. 392 с.

3. *Хромов А. П.* Операторы преобразования для дифференциальных уравнений произвольных порядков // Исследования по дифференциальным уравнениям и теории функций : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1971. Вып. 3. С. 10–23.

4. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 4. С. 414–417.

УДК 534.11

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО КАНАТА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ, ОБЛАДАЮЩЕГО ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ, С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

В. Л. Литвинов (Самара, РФ)
vladlitvinov@rambler.ru

Рассмотрим поперечные колебания, явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс каната переменной длины, обладающего изгибной жесткостью, с учетом влияния сил сопротивления среды и вязкоупругости.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания каната, имеет вид:

$$U_{tt}(x,t) - a^2U_{xx}(x,t) + \frac{\lambda}{\rho}U_t(x,t) + \frac{EI}{\rho}U_{xxxx}(x,t) + \frac{\mu I}{\rho}U_{xxxxt}(x,t) = 0. \quad (1)$$

Граничные условия можно записать следующим образом:

$$U(0,t) = 0, \quad U_{xx}(0,t) = 0, \quad (2)$$

$$U(l_0(t),t) = B\cos W_0(\omega_0 t), \quad U_x(l_0(t),t) = 0. \quad (3)$$

Начальные условия не оказывают влияние на резонансные свойства линейных систем, поэтому в данной задаче они не рассматриваются [1].

В задаче (1)–(3) используются следующие обозначения: $U(x,t)$ — поперечное смещение точки каната с координатой X в момент времени t; E — модуль упругости материала каната; I — осевой момент инерции сечения каната; μ — коэффициент, характеризующий вязкоупругость объекта;λ — сила сопротивления среды, действующая на единицу длины каната при единичной скорости поперечного движения;ρ — линейная плотность массы; $a = \sqrt{T/\rho}$ — минимальная скорость распространения волн; — сила натяжения; $l_0(t) = L_0 - v_0 t$ — закон движения границы каната; L_0 — начальная длина каната; $W_0(z)$ — функция класса C^1; B, ω_0 — постоянные величины.

Если ввести в задачу (1)–(3) безразмерные переменные:

$$\xi = \omega_0 x/a, \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}, \quad U(x,t) = Bu(\xi,\tau)$$

и новую функцию $u(\xi,\tau) = e^{-\alpha\tau}V(\xi,\tau)$, где $\alpha = \lambda/(2\omega_0\rho)$, задача примет вид:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) - V_{\xi\xi}(\xi,\tau) - \alpha^2 V(\xi,\tau) + (\beta^2 - \alpha\gamma^2)V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau) + \\ + \gamma^2 V_{\xi\xi\xi\xi\tau}(\xi,\tau) = 0, \tag{4}$$

$$V(0,\tau) = 0, \quad V_{\xi\xi}(0,\tau) = 0, \tag{5}$$

$$V(l(\varepsilon\tau),\tau) = e^{\alpha\tau}\cos W(\tau), \quad V_\xi(l(\varepsilon\tau),\tau) = 0, \tag{6}$$

где

$$\beta^2 = \frac{EI}{\rho}\frac{\omega_0^2}{a^4}, \quad \gamma^2 = \frac{\mu I}{\rho}\frac{\omega_0^3}{a^4}, \quad l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau,$$

$$W(\tau) = W_0(\tau - \gamma_0), \quad \gamma_0 = \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}, \quad \varepsilon = \frac{-v_0}{a}.$$

Для большинства материалов силы вязкости значительно меньше упругих сил, поэтому γможно считать малым параметром.

Для решения задачи (4)–(6) воспользуемся методом Канторовича-Галеркина. Решение будем искать в виде

$$V(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi,\varepsilon\tau). \tag{7}$$

Обозначим $\delta^2 = (\beta^2 - \alpha\gamma^2)$ и $\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \alpha^2$, где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ — собственные частоты задачи (4)–(6).

Из решения задачи:

$$\delta^2 X_{n\xi\xi\xi\xi}(\xi,\varepsilon\tau) - X_{n\xi\xi}(\xi,\varepsilon\tau) - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau) = 0,$$
$$X_n(0,\varepsilon\tau) = 0, \quad X_{n\xi\xi}(0,\varepsilon\tau) = 0,$$
$$X_n(l(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau) = 0, \quad X_{n\xi}(l(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau) = 0,$$

найдем выражение для динамических мод $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ и функций $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$:

$$X_n(\xi,\varepsilon\tau) = A_n\{\sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau)sh[k_2(\varepsilon\tau)\xi]\},$$
$$\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = [\omega_{1n}(\varepsilon\tau) + d_n(\varepsilon\tau)]\sqrt{1+\delta^2[\omega_{1n}(\varepsilon\tau)+d_n(\varepsilon\tau)]^2},$$

где

$$A_n = 1/\max\{\sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau)sh[k_2(\varepsilon\tau)\xi]\},$$
$$k_1(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}\delta}\sqrt{-1+\sqrt{1+4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}},$$
$$k_2(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}\delta}\sqrt{1+\sqrt{1+4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}},$$
$$c_n(\varepsilon\tau) = -\frac{\sin[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{sh[k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}, \quad \omega_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)},$$
$$d_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{l(\varepsilon\tau)}arctg\frac{\delta\omega_{1n}(\varepsilon\tau)}{\sqrt{1+\delta^2\omega_{1n}^2(\varepsilon\tau)}}.$$

Примем $\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau)$, где функция $y_n(\tau)$ удовлетворяет следующему уравнению, записанному с точностью до величин порядка ε^2:

$$y_n''(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}e^{\alpha\tau}\cos W(\tau). \tag{8}$$

Производя вычисления, для функций $Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau)$, A_{0n} получим:

$$Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau) = \frac{-k_1(\varepsilon\tau)\sqrt{1+4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)}\cos[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)],$$
$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{A_{1n}(\varepsilon\tau)},$$
$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{1}{2}l(\varepsilon\tau)[1-c_n^2(\varepsilon\tau)] - \frac{\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{4k_2(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\delta}.$$

Два линейно независимых решения однородного уравнения, соответствующего (8), имеют вид:

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau), \quad y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)\sin w_n(\tau),$$

где $a_n(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}$, $w_n(\tau) = \int_0^\tau \Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)d\zeta$.

Амплитуда колебаний, соответствующих n-ой динамической моде, имеет следующий вид:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau)\left\{\left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\},$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{e^{-2\alpha\tau}}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}, \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta),$$
$$F_n(\varepsilon\zeta) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\zeta)Q_{n21}(\varepsilon\zeta)e^{\alpha\varsigma}\sqrt{A_{1n}(\varepsilon\zeta)/\Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)}.$$

Установившийся резонанс в рассматриваемой системе наблюдается, если: $W_n(\tau) = w_n(\tau) + \gamma$, где γ — постоянная величина.

Явление прохождения через резонанс может возникнуть на любой из динамических мод, при воздействии на систему гармонического возмущения с частотой ω_0, когда $W(\tau) = \tau$.

Точка резонансной области τ_0 приближенно определяется по следующей формуле:

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{\frac{2\delta^2}{-1+\sqrt{1+4\delta^2(1+\alpha^2)}}}\cdot\pi n - 1\right].$$

Выражение для максимально возможной амплитуды при прохождении через резонанс имеет вид:

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2) = E_n^2(\varepsilon\tau_2)\left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\cos\$_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\sin\$_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}.$$

В заключении отметим, что приведенные здесь результаты позволяют произвести количественный анализ установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс для систем, колебания в которых описывает задача (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анисимов В. Н., Литвинов В. Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами : монография. – Самара : Самар. гос. техн. ун-т, 2009. 131 с.: ил.

2. *Анисимов В. Н., Литвинов В. Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галеркина // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физико-математические науки. № 1. 2009.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СИММЕТРИЧНЫХ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ГЕЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Т. В. Лихачева (Саратов, РФ)
iofinat@mail.ru

Пусть $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$ — система Виленкина, построенная по $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ (см. [1, §1.5]). Для $f \in L[0,1)$ пусть $\hat{f}(k) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\chi_k(x)}\,dx$, $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,...\}$, $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Банахово пространство E измеримых по Лебегу функций называется симметричным, если

1) из неравенства $|f(x)| \le |g(x)|$ п.в. на $[0,1)$ и $g \in E$ следует, что $f \in E$ и $\|f\|_E \le \|g\|_E$.

2) если f и g равноизмеримы и $g \in E$, то $f \in E$ и $\|f\|_E = \|g\|_E$. Известно, что такое пространство $E \subset L^1[0,1)$ и что оператор растяжения $(\sigma_\tau f)(t) := f(t/\tau)X_{[0,1)}(t/\tau)$ непрерывен в E. Здесь X_μ — индикатор множества μ. Пределы

$$\alpha_E := \lim_{\tau \to +0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{E \to E}}{\ln \tau} \quad \beta_E := \lim_{\tau \to \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{E \to E}}{\ln \tau}$$

всегда существуют и называются соответственно верхним и нижним индексом Бойда пространства E. Известно, что $0 \le \alpha_E \le \beta_E \le 1$ (см. [2, глава 2]). В случае, когда $0 < \alpha_E \le \beta_E < 1$, выполняется $\lim\limits_{h \to 0} \|f(\cdot \ominus h) - f(\cdot)\|_E = 0$ для любой $f \in E$ (см. [3, с. 135]). Этот факт позволяет ввести модуль непрерывности в E формулой $\omega^*(f,\delta)_E = \sup\limits_{0<h<\delta} \|f(\cdot \ominus h) - f(\cdot)\|_E$, $\delta \in (0,1)$ ([1, §1.5]).

Обозначим $\omega \in \Phi$, если $\omega(t)$ возрастает и непрерывна на $[0,1]$, $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ при $t > 0$. Функция $\omega \in \Phi$ принадлежит классу Бари-Стечкина B_1, если $\delta \int\limits_\delta^1 t^{-2}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,1)$,