УДК 517.518.822

Теорема типа Джексона о приближении алгебраическими многочленами в равномерной метрике с весом Лагерра[1]

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, Россия)

ramis3004@gmail.com

И.И. Шарапудинов при исследовании аппроксимативных свойств частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра ввел взвешенную величину наилучшего приближения $E_n(f,u_r)$, зависящую от параметра r. В настоящей работе для этой величины при $r=1$ доказана теорема типа Джексона.

Ключевые слова: полиномы Лагерра, специальный ряд, средние Валле Пуссена, скалярное произведение типа Соболева.

Jackson-type theorem on approximation by algebraic polynomials in the uniform metric with Laguerre weight[1]

R. M. Gadzhimirzaev (Makhachkala, Russia)

ramis3004@gmail.com

I.I. Sharapudinov introduced a weighted value of the best approximation $E_n(f,u_r)$ for investigating the approximative properties of partial sums of a special series in Laguerre polynomials. This value depends on the parameter r. In this paper, a Jackson type theorem for the value $E_n(f,u_1)$ is proved.

Keywords: Laguerre polynomials, special series, de la Vallée Poussin means, Sobolev type inner product.

Введение

Пусть $\alpha>-1$, $r\in\mathbb{N}$, f – непрерывная функция, заданная на полуоси $[0,\infty)$ и такая, что в точке $x=0$ существуют производные $f^{(\nu)}(0)$, $\nu=\overline{0,r-1}$. Для функции f в работе [1] были введены специальные ряды по полиномам Лагерра

$$f(x)\sim P_{r-1}(f,x)+x^r\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}_k^{\alpha,r}L_k^{\alpha}(x), \tag{1}$$

где

$$P_{r-1}(f)=P_{r-1}(f,x)=\sum_{i=0}^{r-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i,\ \hat{f}_k^{\alpha,r}=\frac{1}{h_k^{\alpha}}\int_0^{\infty}f_r(t)\rho(t)L_k^{\alpha}(t)dt,$$

$$\rho(t) = t^\alpha e^{-t},\ h_k^\alpha = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!},\ f_r(x) = \frac{f(x) - P_{r-1}(f)}{x^r},\ x > 0.$$

Через $S_n^\alpha(x)$ обозначим частичную сумму ряда (1):

$$S_n^\alpha(x) = S_n^\alpha(f,x) = P_{r-1}(f) + x^r \sum_{k=0}^{n-r} \hat{f}_k^{\alpha,r} L_k^\alpha(x).$$

В той же работе были исследованы аппроксимативные свойства сумм $S_n^\alpha(x)$. В частности при $u_r(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}$ было показано, что имеет место неравенство типа Лебега

$$u_r(x)|f(x) - S_n^\alpha(x)| \le E_n(f)(1 + \lambda_n^{\alpha,r}(x)),$$

в котором

$$E_n(f,u_r) = \inf_{p_n} \sup_{x>0} |p_n(x) - f(x)| u_r(x),$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам p_n степени не выше n, для которых $f^{(i)}(0) = p_n^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, r-1}$, а для функции Лебега $\lambda_n^{\alpha,r}(x)$ при $r - 1/2 < \alpha < r + 1/2$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$ были получены оценки:

$$\lambda_n^{\alpha,r}(x) \le c(\alpha,r) \begin{cases} \ln(n+1) + n^{\alpha-r}, & x \in [0, 3/\theta_n]; \\ \ln(n+1) + \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha-r}{2}}, & x \in [3/\theta_n, \theta_n/2]; \\ \ln(n+1) + \left(\frac{x}{\theta_n^{1/3} + |x-\theta_n|}\right)^{1/4}, & x \in [\theta_n/2, 3\theta_n/2]; \\ n^{-r/2+5/4} x^{r/2+1/4} e^{-x/4}, & x \in [3\theta_n/2, \infty). \end{cases}$$

При этом поведение величины $E_n(f,u_r)$ не было исследовано. В настоящей работе для $E_n(f,u_r)$ при $r = 1$ доказана теорема типа Джексона. Для формулировки этого результата нам понадобятся некоторые обозначения. Через $L_{u_1}^\infty$ обозначим пространство измеримых функций, для которых $\|f\|_{\infty,u_1} = \operatorname{ess\,sup}_{x\ge0} |f(x)u_1(x)| < \infty$, W_{∞,u_1}^1 – пространство функций, абсолютно непрерывных на произвольном отрезке $[a,b] \subset [0,\infty)$ и $f'\varphi \in L_{u_1}^\infty$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть* $u_1(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{4}}$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$ *и* $f \in W_{\infty,u_1}^1$. *Тогда имеет место оценка*

$$E_n(f,u_1) \le \frac{c}{\sqrt{n}} \|f'\varphi\|_{\infty,u_1},$$

где c *– константа, независящая от* f *и* n.

Вспомогательные утверждения

Через $V_{2n}(f,w,x)$, $w(x)=e^{-x}$ обозначим средние Валле Пуссена частичных сумм ряда Фурье функции f по системе полиномов Лагерра – Соболева $\{l^0_{1,n}(x)\}$ [2]:

$$V_{2n}(f,w,x)=f(0)+\frac{x}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{c_{1,j+1}(f)}{j+1}L^1_j(x),$$

где

$$c_{1,k+1}(f)=\int_0^\infty f'(t)L^0_k(t)e^{-t}dt. \tag{2}$$

Отметим, что для $V_{2n}(f,w,x)$ имеет место равенство $V_{2n}(f,w,0)=f(0)$. Кроме того, если $f=q_{2n}$, где q_{2n} алгебраический полином степени не выше $2n$, то $V_{2n}(q_{2n},w,x)=q_{2n}$. Эти свойства позволяют нам использовать $V_{2n}(f,w,x)$ при оценке величины $E_{2n}(f,u_1)$.

Доказательство теоремы 1 основано на следующих утверждениях.

Лемма 1. *Пусть $f\in W^1_{\infty,u_1}$ и*

$$f_n(x)=\begin{cases} f(0), & x\in[0,n^{-1}],\\ f(x), & x\in[n^{-1},2n],\\ f(2n), & x\geq 2n.\end{cases}$$

Тогда имеет место неравенство

$$u_1(x)|f(x)-f_n(x)|\leq\frac{c}{\sqrt{n}}\|f'\varphi\|_{\infty,u_1}.$$

Лемма 2. *Пусть $w(x)=e^{-x}$, функция $f\in L^\infty_{u_1}$ такая, что существуют коэффициенты* (2) *и* $f(0)=0$. *Тогда*

$$u_1(x)|V_{2n}(f,w,x)|\leq c\|f\|_{\infty,u_1}.$$

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$u_1(x)|f_n(x)-V_{2n}(f_n,w,x)|\leq\frac{c}{\sqrt{n}}\|f'\varphi\|_{\infty,u_1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 440–467.

[2] *Гаджимирзаев Р. М.* Аппроксимативные свойства средних типа Валле-Пуссена частичных сумм ряда Фурье по полиномам Лагерра – Соболева // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 3. С. 545–561.