УДК 517.9

Сохранение массивности при вариациях потенциала[1]

В. В. Филатов (Волгоград, Россия)
filatov@volsu.ru

Заметим, что вопрос о взаимосвязях между существованием различных множеств до сих пор не изучался. Однако, очевиден тот факт, что из существования q - массивного множества (ассоциированное с оператором Шрёдингера) следует существование массивного множества. Однако используя уже известные результаты легко получить следующее утверждение: если на многообразии M существует L - массивное множество, то на нём существует и L_1 - массивное множество. Как оказалось можно получить более сильное утверждение о том, что всякое L - массивное множество является L_1 - массивным.

Ключевые слова: массивные множества, эллиптические уравнения, римановы многообразия, теоремы лиувилля.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90110).

Preservation of massiveness due to variations of potential[1]

V. V. Filatov (Volgograd, Russia)
filatov@volsu.ru

It should be noted that the question of the relationships between the existence of various sets has not yet been studied. However, it is evident that the existence of a q-massive set (associated with the Schrodinger operator) implies the existence of a massive set. However, using already known results, it is easy to obtain the following statement: if an L-massive set exists on a manifold M, then an L_1 - massive set also exists on it. As it turns out, a stronger statement can be made that every L-massive set is an L_1 - massive set.

Keywords: massive sets, elliptic equations, Riemannian manifolds, Liouville theorems.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-31-90110).

Введение

Данная работа посвящена изучению ограниченных решений полулинейного уравнения

$$Lu \equiv \Delta u - g(x,u) = 0 \tag{1}$$

на произвольных некомпактных римановых многообразиях. Предполагается, что $g(x,\xi) \not\equiv 0-$ липшицева функция в $M \times R$, такая, что $g(x,\xi_1) \geq g(x,\xi_2)$ и $g(x,-\xi) = -g(x,\xi)$ для всех $\xi_1 \geq \xi_2$ и $\xi \in R$.

Одним из истоков данной тематики является классификационная теория двумерных некомпактных римановых поверхностей. Отличительным свойством поверхностей параболического типа является выполнение на них теоремы типа Лиувилля, утверждающей, что всякая ограниченная снизу супергармоническая функция на таких поверхностях является тождественной постоянной.

Данное свойство поверхностей параболического типа послужило основой для распространения понятия параболичности на римановы многообразия размерности выше двух. А именно, говорят, что некомпактное многообразие имеет параболический тип, если всякая положительная супергармоническая функция на нём является константой. В противном случае, говорят, что некомпактное риманово многообразие имеет гиперболический тип.

Очевидно, что классификационная теория римановых многообразий имеет прямое отношение к теоремам типа Лиувилля. Традиционно классической формулировкой теоремы Лиувилля считается утверждение о том, что всякая ограниченная гармоническая функция в $\mathbb{R}^n$ есть тождественная постоянная. В настоящее время к теоремам типа Лиувилля осуществляется следующий подход.

Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Говорят, что на M выполнено (A, L) - лиувиллево свойство, если любое решение уравнения $Lu = 0$, принадлежащее функциональному классу A, тривиально.

Массивные множества

Особую эффективность в вопросах выполнения теорем типа Лиувилля показала ёмкостная техника. В работе А.А. Григорьяна [5] было введено понятие массивного множества. Приведём обобщённое определение данное в работе [2].

Пусть M - произвольное некомпактное риманово многообразие с пустым краем. Пусть $\Omega \subset M$- открытое собственное подмножество. Если на M существует v - нетривиальное субрешение уравнения (1) такое, что $0 \le v < 1$ и $v = 0$ в $M \setminus \Omega$, то множество Ω называют L - массивным, а такую функцию v - допустимой для Ω.

Если же на M существует v - нетривиальное субрешение уравнения (1), такое что, $0 \le v < 1, v = 0$ в $M \setminus \Omega$ и, кроме того, выполнено

$$D(\Omega, v) = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 + 2 \left(\int\limits_{0}^{v} g(x,t) \right) dx < \infty,$$

то множество Ω будем называть LD - массивным.

Приведём известные результаты. В случае, когда $g(x, u) \equiv 0$ рассматривался в работе А. А. Григорьяна [5]. В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. (А. А. Григорьян) *Размерность пространства ограниченных гармонических функций (с конечным интегралом энергии) на M не менее $m \geq 2$, тогда и только тогда, когда на многообразии существует m попарно не пересекающихся массивных (D-массивных) подмножеств.*

Случай $g(x, u) = q(x)u$ рассматривался в работе А. А. Григорьяна, А. Г. Лосева [4]. Приведём соответствующий результат.

Теорема. (А.А. Григорьяна, А.Г. Лосев) *Размерность пространств ограниченных решений уравнения*

$$\Delta u - q(x)u$$

на M не менее $m \geq 1$ тогда и только тогда, когда на многообразии существует m попарно не пересекающихся L- массивных подмножеств.

В общем случае, для ограниченных решений уравнения (1) в работе А. Г. Лосева, В. В. Филатова [2] был получен следующий результат.

Теорема. (А.Г. Лосев, В.В. Филатов) *На многообразии M существует нетривиальное ограниченное решение полулинейного уравнения* (1) *(с конечным $D(M, u)$) тогда и только тогда, когда на многообразии существует $L(LD)$ - массивное множество.*

Взаимосвязь между массивными множествами

Заметим, что вопрос о взаимосвязях между существованием различных множеств до сих пор не изучался. Однако, очевиден тот факт, что из существования L - массивного множества (ассоциированное с оператором Шрёдингера) следует существование массивного множества.

Кроме этого используя известные на данный момент теоремы можно получить более нетривиальные результаты. Так например в работе А. А. Григорьяна, Н. С. Надирашвили [3] была доказана следующая теорема.

Теорема. (А. А. Григорьян, Н. С. Надирашвили) *Пусть $0 \leq q_2(x) \leq Aq_1(x)$, где $A = const > 0$, $q_2 \not\equiv 0$. Тогда если всякое ограниченное решение уравнения*

$$\Delta u - q_2(x)u = 0$$

есть тождественный ноль, то и всякое ограниченное решение уравнения

$$\Delta u - q_1(x)u = 0$$

есть тождественный ноль.

Как следствие данной теоремы получаем, что из существования нетривиального ограниченного решения уравнения $\Delta u - q_1(x)u = 0$ следует существование нетривиального ограниченного решения уравнения $\Delta u - q_2(x)u = 0$.

Из этого несложно получить следующее утверждение.

Утверждение. *Если на многообразии M существует q_1 - массивное множество, то на нём существует и q_2 - массивное множество.*

Перейдём к формулировке основного результата.

Пусть $0 \le g_1(x,\xi) \le Ag(x,\xi)$, где $A = const > 0, g_1(x,\xi) \not\equiv 0$ при $\xi \ge 0$. Рассмотрим решения уравнений

$$Lu \equiv \Delta u - g(x,\xi) = 0$$

и

$$L_1 u \equiv \Delta u - g_1(x,\xi) = 0.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Всякое $L(LD)$ - массивное множество является $L_1(L_1 D)$ - массивным множеством.*

Заметим, что данная теорема обобщает результат, полученный в работе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Филатов В. В.* Массивные множества, порождённые полулинейными эллиптическими операторами на некомпактных римановых многообразиях // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. 2023. Т. 15, № 2. С. 26–31.

[2] *Losev, A.G., Филатов, V.V.* Liouville type theorems for solutions of semilinear equations on non-compact Riemannian manifolds // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 2021. T. 31, № 4. C. 629–639.

[3] *Григорьян А. А., Надирашвили Н. С.* Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи // Изв. вузов. Матем. 1987. № 5. С. 31–42.

[4] *Григорьян А. А., Лосев А. Г.* О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20, № 3. С. 34–42.

[5] *Григорьян А. А.* О размерности пространств гармонических функций // Матем. заметки. 1990. № 5. С. 55–61.