УДК 517.518

Синус и косинус-преобразования Фурье из классов Липшица[1]

Ю.И. Кротова (Саратов, Россия)

julia.krotova.sgu@gmail.com

Для функций $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ с косинус- (синус-) преобразованием Фурье $\widehat{f_c}$ ($\widehat{f_s}$) мы приводим необходимые и достаточные условия принадлежности $\widehat{f_c}$ ($\widehat{f_s}$) обобщенным классам Липшица $H^{\omega,m}$ и $h^{\omega,m}$ в терминах поведения некоторых интегралов связанных с f или скорости убывания f в бесконечности. Также получено условие существования производной Шварца для косинус- или синус-преобразований Фурье в точке.

Ключевые слова: косинус-преобразование Фурье, синус-преобразование Фурье, характеризация обобщенных классов Липшица, производная Шварца.

Sine and cosine Fourier transforms from generalized Lipschitz classes[1]

Yu. I. Krotova (Saratov, Russia)

julia.krotova.sgu@gmail.com

For functions $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ with cosine (sine) Fourier transforms $\widehat{f_c}$ ($\widehat{f_s}$) we give necessary and sufficient conditions for $\widehat{f_c}$ ($\widehat{f_s}$) to belong the generalized Lipschitz classes $H^{\omega,m}$ and $h^{\omega,m}$ in terms of behavior of some integrals connected with f or of rate of decreasing of f in infinity. The condition for the existence of Schwarz derivative for cosine or sine Fourier transform in a point is also obtained.

Keywords: cosine Fourier transform, sine Fourier transform, characterization of generalized Lipschitz classes, Schwarz derivative.

Введение

Пусть $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу ($f \in L^1(\mathbb{R}_+)$). Тогда можно определить косинус- и синус-преобразование Фурье функции f равенствами для $x \in \mathbb{R}_+$

$$\widehat{f_c}(x) = (2/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \cos xt\, dt; \quad \widehat{f_s}(x) = (2/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \sin xt\, dt.$$

Тогда $\widehat{f_c}(x)$ и $\widehat{f_s}(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}_+$ и $\lim_{x\to+\infty} \widehat{f_c}(x) = \lim_{x\to+\infty} \widehat{f_s}(x) = 0$ (см. [1, гл.1]). Другими словами, $\widehat{f_c}, \widehat{f_s} \in C_0(\mathbb{R}_+)$. Будем считать, что $\widehat{f_c}$ продолжена на $\mathbb{R}$ четным образом, а $\widehat{f_s}$ — нечетным.

Для $m \in \mathbb{N}$ и f, заданной на $\mathbb{R}$, рассмотрим m-ю симметрическую разность $\dot{\Delta}_h^m f(x) = \sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j} f(x+(m-2j)h/2)$. Если $f \in C_0(\mathbb{R})$ и $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, то функция $\omega_m(f,\delta) := \sup\{\|\dot{\Delta}_h^m f\| : 0 \le h \le \delta\}$ называется m-м модулем гладкости.

Обозначим через Φ множество всех непрерывных и возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций ω, таких что $\omega(0)=0$. Если $\omega \in \Phi$ и $\omega(2t) \le C\omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, то пишем $\omega \in \Delta_2$. Если $\omega \in \Phi$ и $\int_0^\delta t^{-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, то ω принадлежит классу Бари B; если же $\omega \in \Phi$ и $\delta^m \int_\delta^\infty t^{-m-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $m>0$, то ω принадлежит классу Бари-Стечкина B_m (см. [2]).

По определению, функция f имеет производную Шварца порядка $m \in \mathbb{N}$ в точке x и эта производная равна A, если существует предел $\lim\limits_{h\to 0} h^{-m}\dot{\Delta}_h^m f(x) = A$.

По определению, $H^{\omega,m} = \{f \in C_0(\mathbb{R}) : \omega_m(f,t) \le C\omega(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ и $h^{\omega,m} = \{f \in H^{\omega,m} : \omega_m(f,t) = o(\omega(t)), t \to 0\}$ for $\omega \in \Phi$. Класс $H^{\omega,1}$ ($h^{\omega,1}$) при $\omega(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\le 1$, будем обозначать через $Lip(\alpha)$ ($lip(\alpha)$), а классы $H^{\omega,2}$ ($h^{\omega,2}$) при $\omega(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\le 2$, будем обозначать через $Zyg(\alpha)$ ($zyg(\alpha)$). Ф.Мориц [3] установил следующий результат.

Теорема A. 1) *Пусть $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такова, что $f \in L^1_{loc}$, $m=1,2$. Если для некоторого $\alpha \in (0,m]$, $m=1,2$, верно соотношение*

$$\int_0^y t^m|f(t)|\,dt = O(y^{m-\alpha}), \quad y>0, \tag{1}$$

то $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и а) при $m=1$ верно включение $\widehat{f_s} \in Lip(\alpha)$, б) при $m=2$ верно включение $\widehat{f_c} \in Zyg(\alpha)$.

2) *Если $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (т.е. f неотрицательна на $\mathbb{R}_+$) и $\widehat{f_s} \in Lip(\alpha)$ при некотором $\alpha \in (0,1]$, то выполнено* (1) *при $m=1$. Если же $\widehat{f_c} \in Zyg(\alpha)$ при некотором $\alpha \in (0,2]$, то* (1) *имеет место при $m=2$.*

3) *Аналогичные 1) и 2) утверждения справедливы для $m=1$, $0<\alpha<1$ и $\widehat{f_c}$, а также для $m=2$, $0<\alpha<2$ и $\widehat{f_s}$.*

Близкие к теореме A результаты получены в [3] для "малых"классов $h^{\omega,m}$, $m=1,2$. Утверждения типа теоремы A можно называть двойственными теоремами типа Боаса (в классических теоремах типа Боаса изучается связь поведения преобразований Фурье функции и принадлежности самой функции классам Липшица или Гельдера). Для тригонометрических рядов результаты типа Боаса см. в [4] и [5]. Целью работы является обобщение теоремы A на случай мажорант ω из классов Бари или Бари-Стечкина и $m \in \mathbb{N}$.

Основные результаты

Теорема 1. 1) *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap \Delta_2$ *и*

$$\int_0^y t^m |f(t)|\, dt = O(y^m \omega(1/y)), \quad y > 0. \tag{2}$$

Тогда $\widehat{f_c} \in H^{\omega,m}$.

2) *Если* $m \in \mathbb{N}$ *четно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, *то из условия* $\widehat{f_c}(t) \in H^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (2). *Если же* $m \in \mathbb{N}$ *нечетно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, $\omega \in B_m \cap B$, *то из условия* $\widehat{f_c}(t) \in H^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (2).

Теорема 2. 1) *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap \Delta_2$ *и выполнено условие* (2) *Тогда* $\widehat{f_s} \in H^{\omega,m}$.

2) *Если* $m \in \mathbb{N}$ *нечетно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, *то из условия* $\widehat{f_s}(t) \in H^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (2). *Если же* $m \in \mathbb{N}$ *четно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, $\omega \in B_m \cap B$, *то из условия* $\hat{f_s}(t) \in H^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (2).

Следствие 1. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $f(t)$ *сохраняет знак на* $\mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B_m \cap B$. *Тогда условия* $\widehat{f_c} \in H^{\omega,m}$, (2) *и*

$$\int_y^\infty f(t)\, dt = O(\omega(1/y), \quad y > 0. \tag{3}$$

равносильны. Аналогичное утверждение верно для $\widehat{f_s}$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$ *и*

$$\int_y^\infty f(t)\, dt = o(y^{-m}), \quad y > 0.$$

Тогда производная Шварца функции $\widehat{f_c}$ *порядка* m *существует в точке* $x > 0$ *и равна* $A(x)$ *в том и только в том случае, когда формально продифференцированный интеграл* $(2/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}_+} t^m f(t) \cos(xt + m\pi/2)\, dt$ *сходится к* $A(x)$.

Аналогичный результат верен для $\widehat{f_s}$.

Будем писать, что $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ слабо монотонно убывает, если $Cf(x_1) \geq f(x)$ при всех $x_1 \in [x/2, x]$. Дадим обобщение одной теоремы Лоренца (см. [4, § 7, теорема 7.23]).

Теорема 4. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B_m \cap B$, f *слабо монотонно убывает. Тогда условия 1)* $f(x) = O(x^{-1}\omega(x^{-1}))$, $x > 0$; *2)* $\widehat{f_c} \in H^{\omega,m}$; *и 3)* $\widehat{f_s} \in H^{\omega,m}$ *равносильны.*

Теперь дадим два аналога теорем 1 и 2 для "малых"обобщенных классов Липшица.

Теорема 5. 1) *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap \Delta_2$ *и выполнены условия* (2) *и*

$$\int_0^y t^m |f(t)|\, dt = o(y^m \omega(1/y)), \quad y \to +\infty. \tag{4}$$

Тогда $\widehat{f_c} \in h^{\omega,m}$.

2) *Если* $m \in \mathbb{N}$ *четно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, *то из условия* $\widehat{f_c}(t) \in h^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (4). *Если же* $m \in \mathbb{N}$ *нечетно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, $\omega \in B_m \cap B$, *то из условия* $\widehat{f_c}(t) \in h^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (4).

Теорема 6. 1) *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap \Delta_2$ *и выполнены условия* (2), (4). *Тогда* $\widehat{f_s} \in h^{\omega,m}$.

2) *Если* $m \in \mathbb{N}$ *нечетно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, *то из условия* $\widehat{f_s}(t) \in h^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (4). *Если же* $m \in \mathbb{N}$ *четно,* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* f *неотрицательна или неположительна на* $\mathbb{R}_+$, $\omega \in B_m \cap B$, *то из условия* $\hat{f}_s(t) \in h^{\omega,m}$ *следует выполнение условия* (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Титчмарш Е. С.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л. : Гостехтеориздат, 1948. 480 с.

[2] *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Москов. матем. об-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.

[3] *Móricz F.* On the degree of continuity and smoothness of sine and cosine Fourier transforms of Lebesgue integrable functions // Acta Math. Hung. 2012. V. 134, № 3. P. 356–368.

[4] *Boas R. P.* Integrability theorems for trigonometric transforms. New York : Springer-Verlag, 1967. 80 p.

[5] *Tikhonov S.* Smoothness conditions and Fourier series // Math. Ineq. Appl. 2007. V. 10, № 2. P. 229–242.