Отметим, что нами также установлены новые результаты для банаховых весовых пространств типа $H_v(G)$ и $H_{v0}(G)$ и для пространств Фреше $HV(G) := \bigcap_n H_{v_n}(G)$ и $HV_0(G) := \bigcap_n H_{v_n 0}(G)$, задаваемых убывающими весовыми последовательностями $V = (v_n)_n$ весов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bierstedt K. D., Meise R., Summers W. H.* A projective description of weighted inductive limits // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272. P. 107–160.

2. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Some recent results on $\mathcal{V}C(X)$ // Advances in the Theory of Fréchet Spaces (Istanbul, 1988). NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Kluwer Acad. Publ., 1989. P. 181–194.

3. *Bierstedt K. D.* A survey on some results and open problems in weighted inductive limits and projective description for spaces of holomorphic functions // Bull. Soc. Roy. Sci. Liége. 2001. Vol. 70. P. 167–182.

4. *Bonet J., Friz M., Jorda E.* Composition operators between weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions // Publ. Math. Debrecen. 2005. Vol. 67. P. 333–348.

5. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Weighted (LB)-spaces of holomorphic functions: $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ and completeness of $\mathcal{V}_0H(G)$ // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 323. P. 747–767.

6. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Weighted inductive limits of spaces of entire functions // Monatsh. Math. 2008. Vol. 154. P. 103–120.

УДК 517.51

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ В НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ РЯДОВ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА

Н. Ю. Агафонова (Саратов, РФ)
AgafonovaNYu@gmail.com

Пусть $\{p_n\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $2 \leqslant p_n \leqslant N$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad 0 \leqslant x_n < p_n. \tag{1}$$

Для x вида k/m_l берем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$.

Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде $k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}$, $0 \leqslant k_i < p_i$, то по определению полагаем для $x \in [0,1)$ $\chi_k(x) = \exp\Big(2\pi i\Big(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\Big)\Big)$.

Для $x, y \in [0,1)$, записанных в виде (1), полагаем по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{i=1}^{\infty} z_n/m_n$, где $z_n = x_n + y_n (mod\, p_n)$, $0 \leq z_n < p_n$. Аналогично определяется $x \ominus y$ (см. [1]).

Так как система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и ограничена на $[0,1)$, зададим коэффициенты Фурье и частные суммы ряда Фурье функции $f \in L^1[0,1)$ равенствами

$$\hat{f}(n) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\, dt\, n \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим пространства $L^p[0,1)$ с нормой $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$ и $B[0,1)$ из ограниченных функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty = = \sup\{f(x) : x \in [0,1)\}$.

Для банахова пространства $X \subset L^1[0,1)$ функций на $[0,1)$ введем $X_N = \{f \in E : \lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_E = 0\}$. В частности, $L^1_N = \{f \in L^1_N : \lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_1 = 0\}$, а B^1_N есть пространство функций с равномерно сходящимися рядами Фурье по $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

В [2] были установлены аналоги классических результатов о мультипликаторах равномерной сходимости.

Теорема А. *1) Если $1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p[0,1)$ и $\{\lambda\}_{n=0}^{\infty}$ такова, что $\|\Lambda_n\|_q := \left\|\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k\chi_k\right\|_q \leqslant M < \infty$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k\hat{f}(k)\chi_k(x)$ является рядом Фурье по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $f_\lambda \in B_N$;*

2)Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $\|\Lambda_n\|_p$ ограничены. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k\hat{f}(k)\chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $f_\lambda \in L_p[0,1)$.

Пусть $f, g \in L^1[0,1)$ и $f * g = \int\limits_0^1 f(x \ominus t)g(t)\, dt$. Известно, что $f \hat{*} g(n) = = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Если $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \hat{f}(k) = 0, k \geqslant n\}$, то $E_n(f)_X = \inf\{\|f - t_n\|_X : t_n \in \mathcal{P}_n\}$. Пусть $E_p(\varepsilon) = \{f \in L^p[0,1) : E_n(f)_p \leqslant \leqslant C\varepsilon_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\{\varepsilon_n\} \downarrow 0$.

Теорема 1. *В теореме А условие $\|\Lambda_n\|_q \leqslant M < \infty$ ($\|\Lambda_n\|_q \leqslant M < < \infty$) равносильно существованию $f \in L^q[0,1)$ ($g \in L^p[0,1)$) со свойством $\hat{g}(n) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Теорема 2. *Пусть $1 < p \leqslant 2$, $f \in L^p[0,1)$, и сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^p$.*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k \hat{f}(k)\chi_k(x)$ *является рядом Фурье функции* $f_\lambda \in B_N$ *и*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_\infty \leqslant C E_n(f)_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^p\right)^{1/p}.$$

Теорема 3. *Пусть* $f \in L_N^1$, $1 < p < \infty$, $\lambda_n \downarrow 0$, *и при этом сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k n^{-1/p}$. *Тогда* $f * g \in L^p[0,1)$ *и*

$$E_n(f * g)_p \leqslant C\|f - S_n(f)\|_1 \left(n^{1-1/p}\lambda_n + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k n^{-1/p}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987.

2. *Волосивец С. С., Агафонова Н. Ю.* О мультипликаторах равномерной сходимости рядов по мультипликативным системам // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. научн. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун–та, 2005. Вып. 3. С. 3—23.

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. Р. Агачев (Казань, РФ)

AgachevJR@ksu.ru

Как хорошо известно, метод коллокации решения операторных уравнений (см., напр., в [1, 2]) является одним из самых простых из известных прямых методов. Однако его применимость ограничивается жесткими условиями на коэффициенты исследуемого уравнения; в настоящее время обоснование метода коллокации для дифференциальных уравнений проведено в случае R-интегрируемости исходных данных. Здесь нами предлагается метод решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, который вбирает в себя положительные стороны метода коллокации, но в то же время может быть применен и в случае суммируемых по Лебегу коэффициентов.