2. *G. Di Pillo and F. Facchinei* Exact penalty functions for nondifferentiable programming problems // Nonsmooth Optimization and Related Topics / Eds. F.H. Clarke, V.F. Demyanov and F. Giannessi. N. Y. : Plenum, 1989. P. 89–107.

3. *Демьянов В. Ф.* Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1994. Вып. 4, № 22. С. 21–27.

4. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационные задачи. М. : Высш. шк., 2005. 335 с.

5. *Demyanov V. F. and Tamasyan G. Sh.* Exact penalty functions in isoperimetric problems // Optimization. 2011. Vol. 60, iss. 1. P. 153–177.

6. *Tamasyan G. Sh.* Numerical methods in problems of calculus of variations for functionals depending on higher order derivatives // J. of Math. Sciences. 2013. Vol. 188, №. 3. P. 299–321.

7. *Dolgopolik M. V., Tamasyan G. Sh.* Method of steepest descent for two-dimensional problems of calculus of variations // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics. Springer Optimization and Its Applications. 2014. Vol. 87. P. 101–113.

8. *Demyanov V. F., Giannessi F. and Karelin V. V.* Optimal Control Problems via Exact Penalty Functions // J. of Global Optimization. 1998. Vol. 12, № 3. P. 215–223.

9. *Тамасян Г. Ш., Чумаков А. А.* Нахождение расстояния между эллипсоидами // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. (принята в печать)

10. *Demyanov V. F.* Mathematical diagnostics via nonsmooth analysis // Optim. Methods Softw. 2005. Vol. 20, № 2–3. P. 197–218.

УДК 517.54

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ПРОИЗВОДНЫХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ.[1]

Е. П. Долженко (Москва, РФ)
eugen@ngcom.ru
С. В. Колесников (Иваново, РФ)
servikkol@rambler.ru

§1. Выпуклые области

В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Каждое конформное отображение $w = \varphi(z)$ любой ограниченной выпуклой области G комплексной плоскости на единичный круг $D = \{w : |w| < 1\}$, по непрерывности продолженная на замыкание*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00952а).

$\overline{G}$ *этой области, имеет всюду на* $\overline{G}$ *ограниченную производную* $\varphi'(z)$ *(так что* $\varphi \in Lip\,1$ *на* $\overline{G}$*).*

Там же найден критерий непрерывности $\varphi'(z)$ в какой-либо точке $\zeta_0 \in \partial G$. Сформулируем этот критерий. Для этого потребуются следующие определения.

Открытая жорданова дуга Γ границы ∂G некоторой односвязной области G называется достижимой из G посредством (односвязной) жордановой области $\Omega(G,\Gamma) \subset G$ если $\overline{\Omega(G,\Gamma)} \cap \partial G = \overline{\Gamma}$.

Пусть Γ — открытая достижимая дуга границы односвязной области G, выпуклая или вогнутая относительно этой области. Очевидно, что в каждой ее внутренней точке ζ существует правая полукасательная. Пусть $\Theta(\zeta)$ обозначает величину угла, образованного правой полукасательной к дуге Γ в некоторой точке $\zeta \in \Gamma$ с положительным направлением действительной оси. Через $\vartheta(\zeta)$ обозначим однозначную ветвь бесконечнозначной функции $\Theta(\zeta)$ на Γ, обладающую следующими свойствами: 1) в случае достижимой дуги Γ, выпуклой из области G, функция $\vartheta(\zeta)$ монотонно не убывает, а в случае вогнутой в G она монотонно не возрастает при движении ζ вдоль Γ в положительном направлении; 2) в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ колебание функции[1] $\vartheta(\zeta)$ строго меньше π.

Через ν обозначим борелевскую меру на Γ, порожденную функцией $\vartheta(\zeta)$. В случае выпуклости достижимой дуги Γ эта мера неотрицательна, в случае её вогнутости — неположительна. Определим потенциал $U_\nu(z)$ на плоскости $\mathbf{C}$ равенством

$$U_\nu(z) := \int_\Gamma \ln \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\nu(\zeta).$$

В этих обозначениях справедлива

Теорема 2. *Функция* $\varphi'(z)$ *непрерывна относительно* $\Omega(G,\Gamma) \cup \Gamma$ *в некоторой достижимой точке* $\zeta_0 \in \Gamma$ *тогда и только тогда, когда* $-\infty < U_\nu(\zeta_0) \le +\infty$ *и потенциал* $U_\nu(z)$ *непрерывен в этой точке вдоль* Γ *(или что то же, на* $\mathbf{C}$*). С другой стороны, функция* $\psi'(w)$ *непрерывна по* $w \in D \cup \gamma$ *в точке* $\omega_0 = \varphi(\zeta_0) \in \gamma$ *тогда и только тогда, когда* $-\infty \le U_\nu(\zeta_0) < +\infty$ *и потенциал* $U_\nu(z)$ *непрерывен в точке* ζ_0*.*

Используя этот критерий, нетрудно построить выпуклую область с гладкой границей, для которой функция $\varphi'(z)$ не является непрерывной в некоторой граничной точке ζ_0.

[1]Колебанием конечной функции $f(z)$, определенной на множестве $E \subset \mathbb{C}$, в точке $z_0 \in E$ называется величина $\lim_{\delta\to 0} \sup\{|f(z') - f(z'')| : \ z', z'' \in E,\ |z' - z_0| < \delta,\ |z'' - z_0| < \delta\}$

§2. Области с гладкими границами

Пусть теперь Γ — открытая достижимая жорданова дуга границы ∂G некоторой односвязной области G, не обязательно выпуклая, $t \in \Gamma$, $D(t,r)$ — открытый круг радиуса $r > 0$ с центром t. Пусть число $a = a(t) > 0$ таково, что при любом $r \in (0,a]$ окружность $C(t,r) := \partial D(t,r)$ пересекается с границей области $\Omega(G,\Gamma)$ ровно в двух точках, причем, лежащих на Γ. Заметим, что это условие выполняется в случае гладкой кривой Γ, однако для выполнения этого условия гладкость не обязательна.

Пусть функция $w = \Phi(z)$ однолистно и конформно отображает область G на верхнюю полуплоскость P таким образом, что $\Phi(\Gamma)$ является ограниченным открытым интервалом действительной оси. Через $G(t,r)$ обозначим пересечение $D(t,r)$ с $\Omega(G,\Gamma)$. При $R \in (0,a]$ положим

$$p(t,R) := 1 - \sqrt{mes\, D(t,R)/(2\, mes\, G(t,R))}, \quad I(t,R) := \int_R^a (p(t,r)/r)\, dr.$$

В этих обозначениях справедлива

Теорема 3. *Если t — фиксированная точка дуги Γ и интеграл $\int_R^a (p(t,r)/r)\, dr$ ограничен сверху при $R \in (0,\, a)$, то $|\Phi(z) - \Phi(t)| \le K|z-t|$ при $z \in \Omega(G,\Gamma) \cup \Gamma$ ($K > 0$ и не зависит от z).*

Теорема 4. *Пусть t — фиксированная точка гладкой открытой достижимой дуги Γ границы односвязной области G. Тогда*

(1) если величина $I(t,R)$ имеет предел A, отличный от $+\infty$ при стремлении R к 0, то функция $\Phi'(z)$ имеет в точке t конечный угловой предел изнутри $\Omega(G,\Gamma)$,

(2) если функция $\Phi'(z)$ имеет в точке t угловой предел, отличный от 0, то величина $I(t,R)$ имеет предел A, отличный от $-\infty$.

Следствием из этой теоремы является

Теорема 5. *При условиях теоремы 4 на Γ, если $t \in \Gamma$ и существует предел $\lim\limits_{R\to 0+} I(t,\, R) \in [-\infty,\, +\infty)$, то функция $\varphi(z)$ имеет в точке t производную относительно множества $\Omega(G,\, \Gamma) \cup \Gamma$.*

Об оценках модулей непрерывностей конформных отображений произвольных жордановых областей см. [3] и [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долженко Е.П., Колесников С.В.* О поведении конформных отображений областей вблизи их выпуклых граничных дуг// Мат. заметки. 2011. Т. 90(4). С. 801–516.

2. *Долженко Е. П., Колесников С. В.* О граничном поведении производных конформных отображений областей с гладкими границами// Вестник Моск. ун-та. Математика. Механика (принята к печати).

3. *Долженко Е. П.* Модули непрерывности и производные конформных отображений // Збірник праць Ін-ту математики НАН Украïни. 2013. Т. 10, № 4–5. С. 450–465.

4. *Долженко Е. П.* Оценки модулей непрерывности конформных отображений областей вблизи их достижимых граничных дуг // Мат. сб. 2011. Т. 202. С. 57–106.

УДК 519.583

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ПО ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ[1]

С. И. Дудов (Саратов, РФ)
DudovSI@info.sgu.ru

Пусть D — заданный выпуклый компакт из $\mathbb{R}^p$, а $n(x)$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^p$.

Ряд известных задач по оценке выпуклого компакта D шаром данной нормы можно записать в следующей общей форме

$$F(R(x), P(x)) \to \min_{x \in S}. \tag{1}$$

Здесь $F(t_1, t_2)$ — некоторая функция вещественных переменных t_1 и t_2, $S \in \{\mathbb{R}^p, D\}$,

$$R(x) = \max_{y \in D} n(x - y), \qquad P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x),$$

где $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$, $\rho_A(x) = \inf_{y \in A} n(x - y)$ — функция расстояния от точки x до множества A.

Цель работы — показать, что при некоторых естественных условиях на функцию $F(t_1, t_2)$, решение задачи (1) может быть выражено решениями «канонической» задачи

$$\varphi(x, r) \equiv h(D, Bn(x, r)) \to \min_{x \in \mathbb{R}^p} \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00238 и 13-01-00175).