СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mazurkiewicz S.* Sur les points singuliers d'une fonction analytique // Fund. Math. 1931. Vol. 17. P. 26–29.

2. *Iversen F.* Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Helsinki : Imprimerie de la Société de littérature finnoise, 1914.

3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М. : Наука, 1970. 592 с.

4. *Heins M.* The set of asymptotic values of an entire function // Proceedings of the Scandinavian Math. Congress, Lund 1953, 1954. P. 56–60.

УДК 517.982.22, 517.982.252, 517.982.256

СВЯЗЬ СИЛЬНО ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ С СИЛЬНОЙ ВЫПУКЛОСТЬЮ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ И СЛАБОЙ ВОГНУТОСТЬЮ ФУНКЦИИ АНТИРАССТОЯНИЯ[1]

М. О. Голубев (Москва, РФ)
maksimkane@mail.ru

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство над вещественным полем скаляров, $B_R(x) = \{y \in \mathbb{H} : \|y - x\| \leq R\}$ замкнутый шар радиуса $R \geq 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{H}$. Функция расстояния от точки $x \in \mathbb{H}$ до множества $A \subset \mathbb{H}$ задается формулой $\varrho_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.

Определение 1 [1, определение 4.3.1]. Непустое множество $A \subset \mathbb{H}$ называется *сильно выпуклым множеством с радиусом* R, если оно может быть представлено в виде пересечения замкнутых шаров радиуса $R > 0$, то есть $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x)$ для некоторого множества $X \subset \mathbb{H}$.

Определение 2 [2, определение 2.1.2 и лемма 2.1.2], [3, определение 1.4]. Пусть $U \subset \mathbb{H}$ открытое множество. Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется *слабо вогнутой с константой* $C > 0$ на множестве U, если она непрерывна на множестве U и для любой пары точек $x_0, x_1 \in U$, таких что $[x_0, x_1] \subset U$, и для любого числа $\lambda \in [0, 1]$ выполнено неравенство:

$$f((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1) \geq (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - \frac{C}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x_0 - x_1\|^2.$$

Определение 3 [4]. Пусть $A \subset \mathbb{H}$ выпуклое замкнутое ограниченное множество. Тогда функция $f_A : \mathbb{H} \to [0, +\infty)$,

$$f_A(x) = \sup_{a \in A} \|x - a\|$$

называется *антирасстоянием* от точки x до множества A.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00295-а и 13-01-12423)

Заметим, что функция антирасстояния $f_A(x)$ выпукла на $\mathbb{H}$ как супремум выпуклых функций.

Определение 4 [4]. Пусть $A \subset \mathbb{H}$ выпуклое замкнутое ограниченное множество, $r > 0$. Тогда множество

$$T_A(r) = \{x \in E \mid f_A(x) > r\}$$

называется *антиокрестностью радиуса* r множества A.

С. И. Дудовым был получен следующий результат.

Предложение 1. *Пусть $A \subset \mathbb{H}$ сильно выпуклое множество радиуса R.*

Тогда для всех $x_0, x_1 \in \mathbb{H} \setminus A$, таких что $\varrho_A(x_0) = \varrho_A(x_1) = \varrho > 0$, $[x_0, x_1] \bigcap A = \emptyset$ и для всех $\lambda \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$\varrho_A\big((1-\lambda)x_0+\lambda x_1\big) \leq (1-\lambda)\varrho_A(x_0)+\lambda\varrho_A(x_1)-\lambda(1-\lambda)\frac{1}{2(R+\varrho)}\|x_0-x_1\|^2.$$

Следующая теорема уточняет предложение 1.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathbb{H}$ выпуклое замкнутое множество. Пусть $R > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) Для любой пары точек $x_0, x_1 \in \mathbb{H} \setminus A$ таких, что $[x_0, x_1] \bigcap A = \emptyset$ и для любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполнено следующее неравенство

$$\varrho_A\big((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1\big) \leq (1-\lambda)\varrho_A(x_0) + \lambda\varrho_A(x_1) -$$

$$-\lambda(1-\lambda)\frac{\|x_0 - x_1\|^2 - \big(\varrho_A(x_0) - \varrho_A(x_1)\big)^2}{2\big(R + (1-\lambda)\varrho_A(x_0) + \lambda\varrho_A(x_1)\big)}.$$

2) A сильно выпуклое множество с радиусом R.

Исследована связь радиуса сильной выпуклости множества A и константы слабой вогнутости функции f_A.

Теорема 2 [3, теорема 3.1]. *Пусть $A \subset \mathbb{H}$ сильно выпуклое множество с радиусом R. Пусть $r > R$. Тогда функция антирасстояния $f_A(x)$ слабо вогнута на множестве $T_A(r)$ с константой $C = \frac{1}{r-R}$.*

М. В. Балашовым был доказан следующий результат.

Теорема 3 [3, теорема 3.2]. *Пусть $A \subset \mathbb{H}$ замкнутое выпуклое ограниченное множество и $r > 0$. Предположим, что функция антирасстояния f_A слабо вогнута на множестве $T_A(r)$ с константой $C > 0$. Тогда A сильно выпуклое множество с радиусом $r - \frac{1}{C}$.*

Из теоремы 2 и теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $A \subset \mathbb{H}$ замкнутое выпуклое ограниченное множество и $R > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) A сильно выпуклое множество с радиусом R

2) Для всех $r > R$ функция антирасстояния f_A слабо вогнута на множестве $T_A(r)$ с константой $C = \frac{1}{r-R}$.

Замечание 1. Заметим, что функция антирасстояния f_A выпукла, а значит и слабо выпукла с любой константой $C > 0$ [2, определение 2.1.2]. Вместе со слабой вогнутостью на множестве $T_A(r)$ это означает, что функция f_A дифференцируема на $T_A(r)$, а f'_A удовлетворяет условию Липшица на $T_A(r)$ с константой C [2, теорема 2.1.2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 440 с.

2. *Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые множества и функции. М. : Физматлит, 2006. 352 с.

3. *Balashov M. V., Golubev M. O.* Weak concavity of the antidistance function // J. of Convex Analysis. 2014. № 4.

4. *Балашов М. В., Иванов Г. Е.* Об удаленных точках множеств // Мат. заметки. 2006. Т. 80, №2. С. 163–170.

УДК 517.984

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА–ДИРИХЛЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ОБЩЕГО ВИДА С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ИМЕЮЩЕЙ РАЗРЫВ

А. В. Голубь (Саратов, РФ)

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^{\theta(x)} A(\theta(x), t) f(t)\, dt, \tag{1}$$

$\theta(x) = 1/2 - x$ при $x \in [0, 1/2]$ и $\theta(x) = 3/2 - x$ при $x \in (1/2, 1]$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, т. е. $\theta(\theta(x)) = x$, причем $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x = 1/2$. Требования на ядро оператора A: функция $A(x, t) = 0$ при $t \geq x$, $A(x, x-0) \equiv 1$ и $\dfrac{\partial^{k+l} A(x,t)}{\partial x^k \partial t^l}$ непрерывны при $t < x$ и $k + l \leq 2$. Такой оператор был рассмотрен в [1].

Справедлива следующая теорема.