УДК 517.9

ВЗАИМОСВЯЗЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин (Ростов-на-Дону, Владикавказ, РФ)
abanin@math.rsu.ru

Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций с равномерными оценками роста играют важную роль в теории аппроксимации, комплексном анализе и анализе Фурье, при исследовании уравнений типа свертки или в частных производных, теории распределений. Они также представляют и значительный самостоятельный интерес для математиков. В связи с этим они интенсивно изучались в работах многих авторов, особенно после фундаментальной работы Бирштедта, Майзе и Саммерса [1].

Алгебраические и топологические свойства (LB)-пространств непрерывных функций и их проективных оболочек были практически полностью исследованы к концу 1980-х годов (см. [1], [2]). Поэтому дальнейшие исследования сконцентрировались на пространствах голоморфных функций. Но, несмотря на тридцатилетние усилия, было установлено не так много завершенных результатов, а многие важные проблемы остаются открытыми до сих пор (см. обзор Бирштедта [3]). Ряд новых результатов в данном направлении был недавно установлен в работах [4–6] при жестких ограничениях на исследуемые пространства, часть из которых удается проверить только для областей типа шара и радиальных весов, а часть, вообще, составляет самостоятельные открытые проблемы.

В докладе будут представлены более сильные, чем прежде, результаты, полученные автором совместно с Фам Чонг Тиеном (Pham Trong Tien, Vietnam National University), в которых упомянутые ограничения либо снимаются вовсе, либо значительно ослабляются. При этом, применяемая нами техника позволяет вместо пространств голоморфных функций исследовать более общие пространства функций на локально компактных σ-компактных множествах. С целью упрощения понимания сути наших результатов, мы, тем не менее, ограничимся пространствами голоморфных функций.

Пусть G — область в $\mathbb{C}^N$. По положительной непрерывной на G функции (*весу*) образуем банаховы пространства

$$H_v(G) := \{f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty\},$$

$$H_{v0}(G) := \{f \in H(G) : \frac{f(z)}{v(z)} \to 0 \text{ при } z \to \partial G\},$$

с нормой $\|\cdot\|_v$. По возрастающей последовательности $\mathcal{V}$ весов v_n на G определяем внутренние индуктивные пределы:

$$\mathcal{V}H(G) := \mathrm{ind} H_{v_n}(G) \text{ и } \mathcal{V}_0 H(G) := \mathrm{ind} H_{(v_n)0}(G),$$

являющиеся (LB)-пространствами, а также их проективные оболочки $H\overline{V}(G) = \bigcap_{v \in \overline{V}} H_v(G)$ и $H\overline{V}_0(G) = \bigcap_{v \in \overline{V}} H_{v0}(G)$, где

$$\overline{V} := \{v - \text{ вес на } G : \sup_{z \in G} \frac{v_n(z)}{v(z)} < \infty, \ \forall\, n\}.$$

Напомним еще, что внутренний индуктивный предел $E = \mathrm{ind} E_n$ последовательности локально выпуклых пространств E_n называется *регулярным* (*ограниченно стягиваемым*), если каждое ограниченное в нем множество содержится и ограничено в некотором E_n (соответственно, каждая сходящаяся в E к нулю последовательность содержится и сходится к нулю в некотором E_n).

Основные наши результаты таковы:

(1) Алгебраическое равенство $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0 H(G)$ всегда влечет, что данные пространства относятся к классу (DFS) (Dual Fréchet-Schwartz spaces). Обратное утверждение верно при дополнительном ограничении (CD): *Для любого n найдется такое m, что единичный шар пространства $H_{v_n}(G)$ содержится в замыкании по топологии компактной сходимости некоторого шара пространства $H_{(v_m)0}(G)$.*

(2) При условии (CD) алгебраическое равенство $H\overline{V}(G) = H\overline{V}_0(G)$ между проективными оболочками (LB)-пространств $\mathcal{V}H(G)$ и $\mathcal{V}_0 H(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда $H\overline{V}(G)$ является полумонтелевским пространством.

(3) Если (LB)-пространство $\mathcal{V}_0 H(G)$ совпадает со своей проективной оболочкой $H\overline{V}_0(G)$, то оно является регулярным индуктивным пределом. Более того, если каждая дискретная последовательность точек G содержит интерполяционную подпоследовательность для пространства $H^\infty(G)$ всех ограниченных голоморфных в G функций, то $\mathcal{V}_0 H(G)$ является ограничено стягиваемым индуктивным пределом. В частности, если G — область в $\mathbb{C}$, дополнение которой до расширенной комплексной плоскости не имеет одноточечных компонент связности, или ограниченная абсолютно выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, то алгебраическое равенство $\mathcal{V}_0 H(G) = H\overline{V}_0(G)$ всегда влечет, что индуктивный предел $\mathcal{V}_0 H(G) = \mathrm{ind} H_{(v_n)0}(G)$ является ограниченно стягиваемым.

Отметим, что нами также установлены новые результаты для банаховых весовых пространств типа $H_v(G)$ и $H_{v0}(G)$ и для пространств Фреше $HV(G) := \bigcap_n H_{v_n}(G)$ и $HV_0(G) := \bigcap_n H_{v_n 0}(G)$, задаваемых убывающими весовыми последовательностями $V = (v_n)_n$ весов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bierstedt K. D., Meise R., Summers W. H.* A projective description of weighted inductive limits // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272. P. 107–160.

2. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Some recent results on $\mathcal{V}C(X)$ // Advances in the Theory of Fréchet Spaces (Istanbul, 1988). NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Kluwer Acad. Publ., 1989. P. 181–194.

3. *Bierstedt K. D.* A survey on some results and open problems in weighted inductive limits and projective description for spaces of holomorphic functions // Bull. Soc. Roy. Sci. Liége. 2001. Vol. 70. P. 167–182.

4. *Bonet J., Friz M., Jorda E.* Composition operators between weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions // Publ. Math. Debrecen. 2005. Vol. 67. P. 333–348.

5. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Weighted (LB)-spaces of holomorphic functions: $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ and completeness of $\mathcal{V}_0H(G)$ // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 323. P. 747–767.

6. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Weighted inductive limits of spaces of entire functions // Monatsh. Math. 2008. Vol. 154. P. 103–120.

УДК 517.51

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ В НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ РЯДОВ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА

Н. Ю. Агафонова (Саратов, РФ)
AgafonovaNYu@gmail.com

Пусть $\{p_n\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $2 \leqslant p_n \leqslant N$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad 0 \leqslant x_n < p_n. \tag{1}$$

Для x вида k/m_l берем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$.

Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде $k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}$, $0 \leqslant k_i < p_i$, то по определению полагаем для $x \in [0,1)$ $\chi_k(x) = \exp\Big(2\pi i \Big(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\Big)\Big)$.