где $f^+(x) = (f(x), f(1-x))^T \in H^+[0,1]$, $f^-(x) = (g(x), -g(1-x))^T \in$ $\in H^-[0,1]$, $f(x) = (f_1(x) + f_2(1-x))/2$, $g(x) = (f_1(x) - f_2(1-x))/2$.

Лемма 7. *Имеет место формула:*

$$R_\lambda \widetilde{f}(x) = R_{1\lambda} f^+(x) + R_{2\lambda} f^-(x).$$

Теорема 4. *Обозначим* $\gamma_n = \{\lambda \,|\, |\lambda - 2n\pi i| = \delta\}$, *где* $\delta > 0$ *и достаточно мало (настолько, что внутри и на* γ_n *нет собственных значений кроме* $\lambda_n^\pm$*). Тогда*

$$P_n \widetilde{f} = P_{1n} f^+ + P_{2n} f^-,$$

где $P_n = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} R_\lambda d\lambda$, $P_{jn} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} R_{j\lambda} d\lambda$ $(j = 1, 2)$.

Замечание. Схожие результаты получаются и в случае $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ \alpha q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$, где α — произвольное конечное число, $\alpha \neq 0$.

УДК 517.5

ОЦЕНКИ НОРМ ДВУХВЕСОВЫХ ОПЕРАТОРОВ СУММИРОВАНИЯ НА ДЕРЕВЕ ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ВЕСА[1]

А. А. Васильева (Москва, РФ)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Критерий ограниченности двухвесового оператора интегрирования на метрическом дереве и порядковые оценки его нормы были получены Эвансом, Харрисом и Пиком [1]. Аналогичное утверждение для двухвесового оператора суммирования несложно вывести из их результата. Однако в общем случае эта оценка имеет довольно сложный вид. Здесь при дополнительных условиях на веса получены оценки более простого вида, которые могут быть удобны для приложений (например, для получения теорем вложения весовых классов Соболева и для оценок поперечников).

Пусть $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \xi_0)$ — дерево с корнем ξ_0. На множестве его вершин $\mathbf{V}(\mathcal{T})$ вводится частичный порядок стандартным образом: $\xi' > \xi$, если существует простой путь $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi')$ такой, что $\xi = \xi_k$ для некоторого $k \in \overline{0, n}$; расстоянием между ξ и ξ' называется величина

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00022, 12-01-00554).

$\rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi') = \rho_{\mathcal{T}}(\xi', \xi) = n + 1 - k$. Кроме того, пишем $\rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi) = 0$. Для $j \in \mathbb{Z}_+$ и $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ положим $\mathbf{V}_j^{\mathcal{T}}(\xi) := \{\xi' \geq \xi : \ \rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi') = j\}$. Для вершины $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ мы обозначим через $\mathcal{T}_\xi = (\mathcal{T}_\xi, \xi)$ поддерево в $\mathcal{T}$ с множеством вершин $\{\xi' \in \mathbf{V}(\mathcal{T}) : \xi' \geq \xi\}$.

Пусть $\mathcal{G}$ — граф, $f : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}$. Положим

$$\|f\|_{l_p(\mathcal{G})} = \left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{G})} |f(\xi)|^p\right)^{1/p}.$$

Обозначим через $l_p(\mathcal{G})$ пространство функций $f : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}$ с конечной нормой $\|f\|_{l_p(\mathcal{G})}$.

Пусть $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево, $1 \leq p \leq \infty$, и пусть $u, w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$ — весовые функции. Определим оператор суммирования $S_{u,w,\mathcal{A}}$ формулой

$$S_{u,w,\mathcal{A}} f(\xi) = w(\xi) \sum_{\xi' \leq \xi} u(\xi') f(\xi'), \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}), \quad f : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}.$$

Через $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}$ обозначим операторную норму $S_{u,w,\mathcal{A}} : l_p(\mathcal{A}) \to l_q(\mathcal{A})$, т. е. минимальную константу C в неравенстве

$$\left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})} w^q(\xi) \left(\sum_{\xi' \leq \xi} u(\xi') f(\xi')\right)^q\right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})} |f(\xi)|^p\right)^{1/p},$$

$f : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — дерево, $1 < p < q < \infty$, $u, w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$. Предположим, что существуют $K \geq 1$, $l_0 \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in (0, 1)$ такие, что*

$$\operatorname{card} \mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi) \leq K, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}),$$

$$\frac{u(\xi')}{u(\xi)} \leq K, \ \frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi''})}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}} \leq \lambda, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}), \quad \xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi), \quad \xi'' \in \mathbf{V}_{l_0}^{\mathcal{A}}(\xi).$$

Тогда $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{K,\lambda,l_0,p,q}{\asymp} \sup_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})} u(\xi) \|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}$.

Пусть $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево, такое что $\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{A}) = \mathbf{V}_N^{\mathcal{A}}(\xi_0)$. Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — неубывающая функция, $\psi(0) = 0$. Предположим, что существует $C_* \geq 1$ такое, что для любых $0 \leq j \leq j' < N + 1$, $\xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0)$

$$C_*^{-1} \cdot 2^{\psi(j') - \psi(j)} \leq \operatorname{card} \mathbf{V}_{j'-j}^{\mathcal{A}}(\xi) \leq C_* \cdot 2^{\psi(j') - \psi(j)}.$$

Пусть u, w : $\mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0,\infty)$, $u(\xi) = u_j$, $w(\xi) = w_j$ для $\xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0)$, $1 \le q \le p \le \infty$.

Положим $\hat{w}_j = w_j \cdot 2^{\frac{\psi(j)}{q}}$, $\hat{u}_j = u_j \cdot 2^{-\frac{\psi(j)}{p}}$, $0 \le j < N+1$. Обозначим через $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$ минимальную константу в неравенстве

$$\left(\sum_{j=0}^{N} \hat{w}_j^q \left(\sum_{i=0}^{j} \hat{u}_j \varphi_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\sum_{j=0}^{N} \varphi_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \varphi_j \ge 0, \quad 0 \le j < N+1.$$

Теорема 2. Пусть $p \ge q$. Тогда $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{p,q,C_*}{\asymp} \mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$; если $C_* = 1$, то $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} = \mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$.

Порядковые оценки $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$ получены в работах Хайнига, Андерсена и Беннетта [2–4].

Результат, аналогичный теореме 2, можно получить и для операторов интегрирования на метрических деревьях. Это обобщает результат Наймарка и Соломяка [5], полученный для $p = q = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Evans W. D., Harris D. J., Pick L.* Weighted Hardy and Poincaré inequalities on trees // J. London Math. Soc. 1995. Vol. 52 (2). P. 121–136.

2. *Andersen K. F., Heinig H. P.* Weighted norm inequalities for certain integral operators // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14. P. 834–844.

3. *Bennett G.* Some elementary inequalities. II // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1988. V. 39 (156). P. 385-–400.

4. *Heinig H.P.* Weighted norm inequalities for certain integral operators, II // Proc. AMS. 1985. Vol. 95. P. 387–395.

5. *Naimark K., Solomyak M.* Geometry of Sobolev spaces on regular trees and the Hardy inequality. // Russian J. Math. Phys. 2001. Vol. 8 (3). P. 322–335.

УДК 517.5

КМА НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ[1]

А. М. Водолазов, С. Ф. Лукомский (Саратов, РФ)
vam21@yandex.ru, LukomskiiSF@info.sgu.ru

Пусть K — локальное поле нулевой характеристики. Оно является конечным расширением $\mathbb{Q}_p$ — поля p-адических чисел степени n. Элементы поля K можно представить как бесконечные в обе стороны последовательности $a = (\ldots, 0_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots)$, $a_j \in GF(p)$, в которых лишь

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).