Theorem. *Let $l \in \mathbb{N}$. Let $1 \le p < +\infty$, $0 \le \lambda \le n/p$. Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$. Then for $u \in W_p^{l,\lambda,0}(\Omega)$ there exist functions $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^{l,\lambda}(\Omega)$ such that*

$$u_m \to u \quad \text{in} \quad W_p^{l,\lambda}(\Omega).$$

R E F E R E N C E S

1. *Burenkov V. I., Guliyev H. V.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces // Studia Math. 2004, №163(2), P. 157–176.

2. *Burenkov V. I., Jain P., Tararykova T. V.* On boundedness of the Hardy operator in Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal, 2011, № 2(1), P. 52–80.

УДК 517.984

О ПРОЕКТОРАХ РИССА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ И НЕГЛАДКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

М. Ш. Бурлуцкая (Воронеж, РФ),
А. П. Хромов (Саратов, РФ)
bmsh2001@mail.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим оператор

$$(Lz)(x) = Bz'(x) + Q(x)z(x), \quad z(0) = z(1), \quad x \in [0,1],$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, T — знак транспонирования,
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$, $q(x) \in C[0,1]$ — комплекснозначная функция. Обозначим через $L^\pm$ операторы:

$$L^\pm y = y'(x) \pm q(x)y(1-x), \quad y(0) = y(1), \quad x \in [0,1].$$

Теорема 1. *Если $y(x)$ есть решение уравнения*

$$L^\pm y = \lambda y(x) + f(x), \tag{1}$$

то $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = \pm y(1-x)$ («+», когда в (1) L^+, «-», когда в (1) L^-), удовлетворяет уравнению

$$Lz = \lambda z + f^\pm(x),$$

где $f^+(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $f^-(x) = (f(x), -f(1-x))^T$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

Обозначим через $H^{\pm}[0,1]$ подпространства:

$$H^{+}[0,1] = \{\widetilde{f}(x) \big| \widetilde{f}(x) = (f(x), f(1-x))^T, f(x) \in L_2[0,1]\},$$
$$H^{-}[0,1] = \{\widetilde{f}(x) \big| \widetilde{f}(x) = (f(x), -f(1-x))^T, f(x) \in L_2[0,1]\}.$$

Лемма 1. *$H^{-}[0,1]$ есть ортогональное дополнение $H^{+}[0,1]$ до $L_2^2[0,1]$.*

Лемма 2. *Если $z(x) \in D_L \cap H^{\pm}[0,1]$, то $Lz \in H^{\pm}[0,1]$.*

Обозначим оператор L на $H^{+}[0,1]$ через L_1, а L на $H^{-}[0,1]$ через L_2.

Теорема 2. *Собственные значения λ_n^{+} (λ_n^{-}) оператора L^{+} (L^{-}), достаточно большие по модулю, простые, и для них справедливы асимптотические формулы*

$$\lambda_n^{\pm} = 2n\pi i + \beta_n^{\pm} + \alpha_n^2, \quad (n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots),$$

где $\beta_n^{\pm}$ явно вычисляемые числа, причем $\sum |\beta_n^{\pm}|^2 < \infty$, а одним и тем же α_n обозначаем произвольные комплексные числа, лишь бы $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$.

Теорема 3. *Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, совпадают с собственными значениями операторов L^{+} и L^{-}, при этом, если $y_{+}(x)$ ($y_{-}(x)$) собственная функция оператора L^{+} (L^{-}), то $z_{+}(x) = (y_{+}(x), y_{+}(1-x))^T$ ($z_{-}(x) = (y_{-}(x), -y_{-}(1-x))^T$) есть собственная функция оператора L_1 (L_2). Собственные значения операторов L_1 и L_2, достаточно большие по модулю, простые, а оператора L простые или двукратные (в зависимости от того, совпадают ли λ_n^{+} и λ_n^{-} или различны).*

Лемма 3. *Спектр операторов L^{+} и L^{-} состоит из собственных значений.*

Лемма 4. *Если λ — регулярная точка оператора L, то она является регулярной точкой для L_1 и L_2.*

Лемма 5. *Если λ — регулярная точка оператора L, то*

$$R_\lambda f^{+} = R_{1\lambda} f^{+}, \qquad R_\lambda f^{-} = R_{2\lambda} f^{-},$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, $R_{1\lambda} = (L_1 - \lambda E)^{-1}$, $R_{2\lambda} = (L_2 - \lambda E)^{-1}$ (E — единичный оператор), $f^{+} \in H^{+}[0,1]$, $f^{-} \in H^{-}[0,1]$.

Лемма 6. *Если $\widetilde{f}((x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in L_2^2[0,1]$, то*

$$\widetilde{f}(x) = f^{+}(x) + f^{-}(x),$$

где $f^+(x) = (f(x), f(1-x))^T \in H^+[0,1]$, $f^-(x) = (g(x), -g(1-x))^T \in$ $\in H^-[0,1]$, $f(x) = (f_1(x) + f_2(1-x))/2$, $g(x) = (f_1(x) - f_2(1-x))/2$.

Лемма 7. *Имеет место формула:*

$$R_\lambda \widetilde{f}(x) = R_{1\lambda} f^+(x) + R_{2\lambda} f^-(x).$$

Теорема 4. *Обозначим* $\gamma_n = \{\lambda | \, |\lambda - 2n\pi i| = \delta\}$, *где* $\delta > 0$ *и достаточно мало (настолько, что внутри и на* γ_n *нет собственных значений кроме* $\lambda_n^{\pm}$*). Тогда*

$$P_n \widetilde{f} = P_{1n} f^+ + P_{2n} f^-,$$

где $P_n = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} R_\lambda d\lambda$, $P_{jn} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} R_{j\lambda} d\lambda$ $(j = 1, 2)$.

Замечание. Схожие результаты получаются и в случае $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ \alpha q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$, где α — произвольное конечное число, $\alpha \neq 0$.

УДК 517.5

ОЦЕНКИ НОРМ ДВУХВЕСОВЫХ ОПЕРАТОРОВ СУММИРОВАНИЯ НА ДЕРЕВЕ ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ВЕСА[1]

А. А. Васильева (Москва, РФ)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Критерий ограниченности двухвесового оператора интегрирования на метрическом дереве и порядковые оценки его нормы были получены Эвансом, Харрисом и Пиком [1]. Аналогичное утверждение для двухвесового оператора суммирования несложно вывести из их результата. Однако в общем случае эта оценка имеет довольно сложный вид. Здесь при дополнительных условиях на веса получены оценки более простого вида, которые могут быть удобны для приложений (например, для получения теорем вложения весовых классов Соболева и для оценок поперечников).

Пусть $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \xi_0)$ — дерево с корнем ξ_0. На множестве его вершин $\mathbf{V}(\mathcal{T})$ вводится частичный порядок стандартным образом: $\xi' > \xi$, если существует простой путь $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi')$ такой, что $\xi = \xi_k$ для некоторого $k \in \overline{0, n}$; расстоянием между ξ и ξ' называется величина

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00022, 12-01-00554).