$H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) = 1 + 12\beta + 3\beta^3$. Первая «равновесная» разность $H^{(3)}(a) - H^{(3)}(b) = -24\beta + 24\beta^2 - 16\beta^3$. Вторая «равновесная» разность $-(a_1 - b_1)\overline{\varkappa} = -2a_1\overline{\varkappa} = 24\beta - 24\beta^2 + 16\beta^3$. По этому примеру можно судить о надежности преобразований.


СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буланов А. П.* Об инвариантах на совокупности показателей взаимно обратных функций Ламберта, представленных цепными экспонентами // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зим. мат. шк. Воронеж, 2013. С. 295–303.

2. *Дубинов А. Е., Галидакис И. Н.* Явное решение уравнения Кеплера // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 3(139). С. 365–370.

3. *Galidakis I. N.* On an application of Lambert's $W$ function to infinite exponentials // Complex Var. Theory Appl. 2004. Vol. 49, № 11. P. 759–780.

4. *Galidacis I. N.* On Solving the $p$-th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z) = z$ // Complex Variables. 2005. Vol. 50, № 13. P. 977–997.

5. *Буланов А. П.* О рекуррентной формуле определения показателей обратной функции Ламберта // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зим. шк. Саратов, 2012. С. 29–32.

6. *Буланов А. П.* Цепные экспоненты и функции Ламберта // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 43. С. 64–71.

7. *Буланов А. П.* Шестой показатель обратной функции Ламберта, представленной цепной экспонентой // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозаводск. междунар. конф. Петрозаводск, 2012. С. 5–10.

8. *Буланов А. П.* Регулярность степеней бесконечной кратности // Изв. АНРФ. Сер. математическая. Т. 62, № 5. 1998. С. 49–78.

9. *Буланов А. П.* Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения // Мат. сб. 2001. Т. 192. № 11. С. 3–34.



УДК 517.51


# APPROXIMATION BY $C^{\infty}$ FUNCTIONS IN SOBOLEV–MORREY SPACES


**V. I. Burenkov (Cardiff, UK and Astana, Kazakhstan)**
burenkov@cf.ac.uk
**M. Lanza de Cristoforis (Padova, Italy)**
mldc@math.unipd.it
**N. A. Kydyrmina (Karaganda, Kazakhstan)**
nurgul-k@mail.ru


Let $\mathbb{N}$ denote the set of all natural numbers including 0. Throughout the paper, $n$ is an element of $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

**Definition 1.** *Let $\Omega$ be a Lebesgue measurable subset of $\mathbb{R}^n$. Let $0 < p \leq \leq +\infty$ and let $w$ be a measurable function from $]0, +\infty[$ to $]0, +\infty[$. Denote by $\mathcal{M}_p^{w(\cdot)}(\Omega)$ the space of all real-valued measurable functions on $\Omega$ for which*

$$\|f\|_{\mathcal{M}_p^{w(\cdot)}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \|w(\rho)\|f\|_{L_p(B(x,\rho)\cap\Omega)}\|_{L_\infty(0,\infty)} < \infty.$$

**Definition 2.** *Let $0 < p \leq +\infty$. Denote by $\Lambda_{p,\infty}$ the set of all measurable functions $w$ from $]0, +\infty[$ to $]0, +\infty[$ which are not equivalent to $0$ and such that*

$$\|w(\rho)\|_{L_\infty(1,\infty)} < \infty, \quad \|w(\rho)\rho^{\frac{n}{p}}\|_{L_\infty(0,1)} < \infty.$$

In [1], [2] it is proved that, if $w$ is a non-negative measurable function from $]0, +\infty[$ to $]0, +\infty[$ which is not equivalent to 0, then the space $\mathcal{M}_p^{w(\cdot)}(\Omega)$ is non-trivial, *i.e.* consists not only of functions $f$ equivalent to 0 on $\Omega$ if, and only if, $w \in \Lambda_{p,\infty}$.

**Definition 3.** *If* $w_\lambda(\rho) = \begin{cases} \rho^{-\lambda}, & \rho \in ]0,1], \\ 1, & \rho \geq 1, \end{cases}$ *, then we set*

$$M_p^\lambda(\Omega) \equiv \mathcal{M}_p^{w_\lambda}(\Omega)$$

*and the condition $w_\lambda \in \Lambda_{p,\infty}$ means that $0 \leq \lambda \leq n/p$.*

We find convenient to set

$$|f|_{\rho,w,p,\Omega} \equiv \sup_{x\in\Omega} \Big\|w(r)\|f\|_{L_p(B(x,r)\cap\Omega)}\Big\|_{L_\infty(0,\rho)} \quad \forall\, \rho \in ]0, +\infty[,$$

and

$$|f|_{\rho,\lambda,p,\Omega} \equiv |f|_{\rho,w_\lambda,p,\Omega}$$

for all measurable functions $f$ from $\Omega$ to $]0, +\infty[$ and for all functions $w$ from $]0, +\infty[$ to $]0, +\infty[$.

**Definition 4.** *Let $\Omega$ be an open subset of $\mathbb{R}^n$. Let $p \in [1, +\infty]$.*

*(i) Let $w$ be a function from $]0, +\infty[$ to $]0, +\infty[$. Then we define as generalized little Morrey space with weight $w$ and exponent $p$ the subspace*

$$\mathcal{M}_p^{w,0}(\Omega) \equiv \left\{ f \in \mathcal{M}_p^w(\Omega) \,:\, \lim_{\rho\to 0} |f|_{\rho,w,p,\Omega} = 0 \right\}$$

*of $\mathcal{M}_p^w(\Omega)$.*

*(ii) Let $\lambda \in [0,+\infty[$. Then, in particular, the little Morrey space with exponents $\lambda, p$ is the subspace*

$$M_p^{\lambda,0}(\Omega) \equiv \left\{ f \in M_p^\lambda(\Omega) \,:\, \lim_{\rho\to 0} |f|_{\rho,\lambda,p,\Omega} = 0 \right\}$$

*of $M_p^\lambda(\Omega)$.*

**Lemma 1.** *Let $\Omega$ be an open subset of $\mathbb{R}^n$. Let $p \in [1,+\infty]$. Let $w \in \Lambda_{p,\infty}$. Then $\mathcal{M}_p^{w,0}(\Omega)$ is a closed proper subspace of $\mathcal{M}_p^w(\Omega)$.*

**Definition 5.** *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set. Let $l \in \mathbb{N}$, $p \in [1,+\infty]$ and $\lambda \in [0, n/p]$. Then we define the Sobolev space of order $l$ built on the Morrey space $M_p^\lambda(\Omega)$, as the set*

$$W_p^{l,\lambda}(\Omega) \equiv \left\{ f \in M_p^\lambda(\Omega) : D_w^\alpha f \in M_p^\lambda(\Omega) \ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq l \right\},$$

*where $D_w^\alpha f$ is the weak derivative of $f$.*

*Then we set*

$$\|f\|_{W_p^{l,\lambda}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq l} \|D_w^\alpha f\|_{M_p^\lambda(\Omega)} \quad \forall\ f \in W_p^{l,\lambda}(\Omega).$$

*In particular, $W_p^{0,\lambda}(\Omega) = M_p^\lambda(\Omega)$ and $W_p^{l,0}(\Omega) = W_p^l(\Omega)$, where $W_p^l(\Omega)$ denotes the classical Sobolev space with exponents $l, p$ in $\Omega$. It is obvious that $W_p^{l,\lambda}(\Omega) \subset W_p^l(\Omega)$.*

**Definition 6.** *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set. Let $l \in \mathbb{N}$, $p \in [1,+\infty]$ and $\lambda \in [0, n/p]$. Then we define the Sobolev space of order $l$ built on the little Morrey space $M_p^{\lambda,0}(\Omega)$, as the set*

$$W_p^{l,\lambda,0}(\Omega) \equiv \left\{ f \in M_p^{\lambda,0}(\Omega) : D_w^\alpha f \in M_p^{\lambda,0}(\Omega) \ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq l \right\}.$$

Since $M_p^{\lambda,0}(\Omega)$ is a closed subspace of $M_p^\lambda(\Omega)$, we can easily deduce the validity of

**Lemma 2.** *Let $\Omega$ be an open subset of $\mathbb{R}^n$. Let $l \in \mathbb{N}$, $p \in [1,+\infty]$ and $\lambda \in [0, n/p]$. Then $W_p^{l,\lambda,0}(\Omega)$ is a closed proper subspace of $W_p^{l,\lambda}(\Omega)$.*

Contrary to the classical Sobolev spaces built on the $L_p$ spaces with $p < \infty$, the Sobolev spaces built on Morrey spaces are not separable spaces even if $p < \infty$ and we cannot expect that the set of $C^\infty$ functions of a Sobolev Morrey space be dense in a Sobolev Morrey space. However, we show that the functions in a Sobolev space built on little Morrey spaces can be approximated by $C^\infty$ functions.

**Theorem.** *Let $l \in \mathbb{N}$. Let $1 \le p < +\infty$, $0 \le \lambda \le n/p$. Let $\Omega$ be a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$. Then for $u \in W_p^{l,\lambda,0}(\Omega)$ there exist functions $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^{l,\lambda}(\Omega)$ such that*

$$u_m \to u \quad \text{in} \quad W_p^{l,\lambda}(\Omega).$$

R E F E R E N C E S

1. *Burenkov V. I., Guliyev H. V.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces // Studia Math. 2004, №163(2), P. 157–176.

2. *Burenkov V. I., Jain P., Tararykova T. V.* On boundedness of the Hardy operator in Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal, 2011, № 2(1), P. 52–80.

УДК 517.984

## О ПРОЕКТОРАХ РИССА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ И НЕГЛАДКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

**М. Ш. Бурлуцкая (Воронеж, РФ),**
**А. П. Хромов (Саратов, РФ)**
bmsh2001@mail.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим оператор

$$(Lz)(x) = Bz'(x) + Q(x)z(x), \quad z(0) = z(1), \quad x \in [0,1],$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $T$ — знак транспонирования, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$, $q(x) \in C[0,1]$ — комплекснозначная функция. Обозначим через $L^\pm$ операторы:

$$L^\pm y = y'(x) \pm q(x)y(1-x), \quad y(0) = y(1), \quad x \in [0,1].$$

**Теорема 1.** *Если $y(x)$ есть решение уравнения*

$$L^\pm y = \lambda y(x) + f(x), \tag{1}$$

*то $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = \pm y(1-x)$ («+», когда в (1) $L^+$, «-», когда в (1) $L^-$), удовлетворяет уравнению*

$$Lz = \lambda z + f^\pm(x),$$

*где $f^+(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $f^-(x) = (f(x), -f(1-x))^T$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).