$$\mathcal{Y} = 2^{-1}(\widehat{W}^{-1}(b_0,0)\widehat{y}(b_0) + \widehat{W}^{-1}(a_0,0)\widehat{y}(a_0)),$$

где $\widehat{y}=\mathrm{col}(y^{[0]},...,y^{[r-1]})$, $\widehat{W}$ — матрица с элементами $W_m^{[j-1]}$ $(j,m=1,...,r)$. Пара (Q,Γ) является пространством граничных значений отношения L_0 в смысле работ [4], [5]. Из [5] следует

Теорема 2. *Существует взаимно однозначное соответствие между обобщенными резольвентами отношения L_0 и краевыми задачами*

$$Ly = \lambda y + f, \quad (K(\lambda) - E)\mathcal{Y}' - i(K(\lambda) + E)\mathcal{Y} = 0, \quad \mathrm{Im}\lambda > 0, \qquad (2)$$

где $\{\mathcal{Y},\mathcal{Y}'\} = \Gamma\{y,f\}$, $\lambda \to K(\lambda)$ — голоморфная при $\mathrm{Im}\lambda > 0$ операторная функция в Q такая, что $\|K(\lambda)\| \leqslant 1$. Каждое решение задачи (2) определяет обобщенную резольвенту и, обратно, всякая обобщенная резольвента определяется решением задачи (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Брук В. М.* О линейных отношениях, порожденных интегральным уравнением с неванлинновской мерой // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 3–19.

2.*Zettl A.* Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mountain J. Math. 1975. Vol. 5, № 3. P. 453–474.

3. *Шин Д.* О казидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Мат. сб. 1943. Т. 13, № 1. С. 39–70.

4. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 1. С. 41–48.

5. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. 1976. Т. 100, № 2. С. 210–216.

УДК 517.984

О ВОЗМОЖНЫХ ИНВАРИАНТАХ НА СОВОКУПНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ЦЕПНЫХ ЭКСПОНЕНТ

А. П. Буланов (Обнинск, РФ)

Рассмотрим две функции

$$L_b(z) = z \cdot B(z) \qquad L_a(w) = w \cdot A(w), \qquad (1)$$

где $B(z)$ и $A(w)$ бесконечные цепные экспоненты

$$B(z) = e^{b_1 \cdot z \cdot e^{b_2 \cdot z \cdot e^{\cdots}}} = \langle e^z;\ b_1,\ b_2,\ \ldots\rangle\,, \qquad (2)$$

$$A(w) = e^{a_1 \cdot w \cdot e^{a_2 \cdot w \cdot e^{\cdots}}} = \langle e^w;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\rangle\,, \qquad (3)$$

В последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ показатели $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $b_1 \neq b_2$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |b_n| = \bar{b} < \infty$, а показатели $a_1,\ a_2, \ldots$ определяются рекуррентной формулой посредством $b_1,\ b_2, \ldots$ (в работе [1] на стр. 30 см. формулу (5), здесь см. ниже формулу (5)). Эти две цепные экспоненты образуют две функции Ламберта (1), которые могут быть взаимно обратными функциями по отношению друг к другу. Первоначальная функция Ламберта

$$w = z \cdot \langle e^z;\ -b,\ -b,\ \ldots\rangle \tag{4}$$

определяется как обратная функция по отношению к элементарной функции

$$z = w \cdot e^{bw} = w \cdot \langle e^w;\ b,\ 0,\ 0,\ \ldots\rangle\,.$$

Из формулы (4) мы видим равенство $b_1 = b_2$; тогда, включая неравенство $b_1 \neq b_2$, мы приходим к обобщению понятия первоначальной функции Ламберта (4).

Это обобщение является промежуточным между первоначальной функцией Ламберта (4) и гиперфункциями Ламберта (Lambert's W function), которые ввел И. Н. Галидакис в 2004 году. W-функции Ламберта используются при решении некоторых функциональных уравнений, возникающих, в частности в гравитационной механике (см. [2–4]).

Здесь задача заключается в том, чтобы по заданной функции $w = L_b(z) = z \cdot B(z)$ найти обратную к ней функцию $z = L_a(w) = w \cdot A(w)$, аналитическую в окрестности точки $w = 0$ (или наоборот: по заданной функции $z = L_a(w)$ найти обратную к ней функцию $w = L_b(z)$), то есть по заданным показателям $b_1, b_2, \ldots$ найти показатели $a_1, a_2, \ldots$

В общем случае легко определяются первые три показателя

$$a_1 = -b_1, \quad a_2 = b_2 - b_1, \quad a_3 = \frac{1}{b_2 - b_1} \cdot (b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2b_3).$$

Показатели $a_4, a_5, \ldots, a_n$ определяются по упомянутой рекуррентной формуле

$$a_n = \frac{-1}{a_1a_2\cdots a_{n-1}} \cdot \left\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!} \times \right.$$

$$\left. \times \left[(-(n+1))^{k_1-1} b_1^{k_1} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} + a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right] + b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n \right\}. \tag{5}$$

В работе [5] в развернутом виде представлены две формулы для определения «обратного» показателя a_4 посредством b_1, b_2, b_3, b_4 и показателя a_5 посредством b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и a_1, a_2, a_3, a_4.

Цепная экспонента (1) в окрестности точки $z = 0$ является аналитической функцией и ее степенной ряд (см. [8] и [9])

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{n!} \cdot z^n, \tag{6}$$

где

$$H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \times$$

$$\times b_1^{k_1} \cdot (b_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (b_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \ldots \cdot (b_n \cdot k_{n-1})^{k_n}, \tag{7}$$

сходится в круге $K = \left\{ z : \ |z| < \frac{1}{be} \right\}$. В этом же круге сходится и степенной ряд

$$w = z \cdot B(z) = w(0) + \frac{w'(0)}{1!} \cdot z + \frac{w''(0)}{2!} \cdot z^2 + \cdots =$$

$$= B(0) \cdot z + \frac{B'(0)}{1!} \cdot z^2 + \frac{B''(0)}{2!} \cdot z^3 + \cdots \tag{8}$$

В работе [6] показывается, как получается формула (5). Используя разложение обратной функции

$$z = z(w) = L_a(w) = w \cdot A(w), \tag{9}$$

аналитическую в окрестности точки $w = 0$, по Лагранжу, имеем формулу

$$z^{(n+1)}(0) = H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n). \tag{10}$$

Цепную экспоненту (9), показатели которой $a_1, a_2, \ldots$ подлежат определению, представим в виде двух степенных рядов. Во-первых, как формальное разложение в окрестности точки $w = 0$ в степенной ряд таким же способом, как осуществлено разложение цепной экспоненты (1) по формулам (6) и (7):

$$A(w) = A(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{(n)}(0)}{n!} \cdot w^n =$$

$$= H_a^{(0)} + \frac{H_a^{(1)}}{1!} \cdot w + \frac{H_a^{(2)}}{2!} \cdot w^2 + \cdots + \frac{H_a^{(n)}}{n!} \cdot w^n \cdots, \tag{11}$$

где

$$H_a^{(n)} = H^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \times$$

$$\times a_1^{k_1} \cdot (a_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (a_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \ldots \cdot (a_n \cdot k_{n-1})^{k_n} \qquad (12)$$

Во-вторых, функция $A(w)$ выражается посредством степенного ряда

$$z = z(w) = \frac{z'(0)}{1!} \cdot w + \frac{z''(0)}{2!} \cdot w^2 + \cdots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \cdot w^n + \cdots , \qquad (13)$$

и системы равенств

$$z'(w) = A(w) + w \cdot A'(w), \quad z''(w) = 2A'(w) + w \cdot A''(w), \ldots$$

$$\ldots, z^{(n)}(w) = nA^{(n-1)}(w) + w \cdot A^{(n)}(w),$$

откуда получаем второе представление

$$A(w) = \frac{z'(0)}{1!} + \frac{z''(0)}{2!} \cdot w + \frac{z'''(0)}{3!} \cdot w^2 + \cdots + \frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \cdot w^n + \cdots \qquad (14)$$

Заметим, что каждый коэффициент $H_a^{(n)}$ в разложении (12) выражен формулой (11) посредством показателей $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в то время, как в разложении (14) коэффициент $z^{(n+1)}(0)$ выражен полиномом (10). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной w получаем систему равенств:

$$H_a^{(0)} = A(0) = z'(0) = 1; \quad 2H_a^{(1)} = 2A'(0) = z''(0);$$

$$3H_a^{(2)} = 3A''(0) = z'''(0); \quad \ldots \quad nH_a^{(n-1)} = nA^{(n-1)}(0) = z^{(n)}(0);$$

$$(n+1)H_a^{(n)} = (n+1)A^{(n)}(0) = z^{(n+1)}(0); \quad \ldots . \qquad (15)$$

Равенства в последней строке запишем в виде

$$z^{(n+1)}(0)\Big|_a = (n+1)H_a^{(n)} = (n+1)H^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$$

$$= (n+1)A^{(n)}(0) = H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) = z^{(n)}(0)\Big|_b \qquad (16)$$

Для выявления инвариантов и построения «равновесия» от этих равенств будем следовать двумя путями. О некоторых шагах первого пути было сказано в работе [1]. Равенства (16) дают рекуррентную формулу (5), по которой определяются все показатели типа «а». Если развернуть сумму в правой части этой формулы, то напишем слагаемые в количестве $2^n - 1$. В работе [7] представлена в развернутом виде формула для определения a_6 посредством $b_1, \ldots, b_6$ и $a_1, \ldots, a_5$. В правой части этой формулы в фигурной скобке имеем 63 слагаемых. Если же в тех слагаемых, в которых множителями являются a_k, заменить каждый множитель a_k его выражением, вычисленном по данной рекуррентной формуле (5) посредством $b_1, b_2, \ldots, b_k$, то количество слагаемых во много раз увеличится, но среди них окажутся подобные. Здесь делается попытка сократить количество слагаемых путем выявления инвариантов. Некоторые слагаемые оставляем в обозначениях «a» и с обратным знаком переставляем в левую часть уравнения, полученного из основной формулы (5). Тогда основное равенство может оказаться инвариантом.

На странице 298 работы [1] намечены некоторые «шаги» для выявления инвариантов. Умножая левую и правую части равенства (5) на $n!a_2a_3\cdots a_{n-1}$ и перемещая последнее слагаемое в правой части на первое место получаем уравнение

$$n!a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n = n!b_2b_3\ldots b_{n-1}b_n + \left\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{n!k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!}\times \right.$$

$$\left. \times\left[(-(n+1))^{k_1-1}b_1^{k_1-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{k_1-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right]\right\}. \qquad (17)$$

Сумму в правой части в фигурной скобке этого равенства запишем в виде

$$\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{n!k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!}\times$$

$$\times\left[(-(n+1))^{k_1-1}b_1^{k_1-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{k_1-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right] =$$

$$= \sum_{j=n}^{2}\left\{\frac{n!}{j!}\sum_{k_2+k_3+\ldots+k_{n-1}=n-j}\frac{j^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_2!\cdots k_{n-1}!}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(-(n+1))^{j-1}b_1^{j-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{j-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right]\right\}+$$

$$+n!\sum_{k_2+k_3+\ldots+k_{n-1}=n-1}\frac{k_2^{k_3}k_3^{k_4}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_2!\cdots k_{n-1}!}\times$$

$$\times\left[(b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right]. \qquad (18)$$

Видно, что последняя сумма распадается на две суммы, в одной из которых слагаемые являются типа «b», а другая сумма имеет точно такие же слагаемые, только буквы b заменяются буквами a.

Последующие шаги заключаются в том, что содержимое в каждой квадратной [ ] скобке, где $k_1 = j \geq 2$, мы помещаем в две квадратные скобки (т. е. $[\,] = [\,]_{(a,b)} + [\,]_a$) в виде

$$[\,]_{(a,b)} = [(-(n+1))^{j-1}(b_1^{j-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{j-1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}})], \qquad (19)$$

$$[\,]_a = [((-(n+1))^{j-1} - 1)a_1^{j-1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}]. \qquad (20)$$

Если слагаемое «a» в квадратной скобке (19) (с коэффициентом, стоящим перед квадратной скобкой) переставить в левую часть равенства (17), то мы имеем слагаемое в одном из инвариантов. Слагаемое же в квадратной скобке (20) подлежит преобразованиям вместе с другими «a» — слагаемыми с целью получения инвариантов для фиксированного n, используя инварианты, полученные для меньших n.

Для следования вторым путем выявления инвариантов нам понадобится формула, по которой можно представить форму $H^{(n)}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ (и форму $H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$) n-го порядка посредством форм, порядок которых строго меньше: $H^{(0)}(1) = 1$, $H^{(1)}(a_1) = a_1$, $H^{(2)}(a_1, a_2) = 2a_1a_2 + a_2^2$, $H^{(3)}(a_1, a_2, a_3), \ldots H^{(n-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. В работе [8] (см. с. 60, лемма 7) доказана формула

$$H^{(n)}(g_r) = H^{(0)}(a_r) \cdot \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} H^{(n-m)}(g_{r+1}^m), \qquad (21)$$

где $g_r = g_r(z) = a_r \cdot e^{a_{r+1} \cdot z \cdot e^{a_{r+2} \cdot z \cdot e^{\cdots}}} = a_r \cdot e^{g_{r+1}}$, а формы $H^{(n)}(g_r)$, $H^{(n-m)}(g_{r+1}^m)$ в нынешних обозначениях представляются так:

$$H^{(n)}(g_r) = a_r \cdot H^{(n)}(a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_{r+n}),$$

$$H^{(n-m)}(g_{r+1}^m) = a_{r+1}^m \cdot H^{(n-m)}(m \cdot a_{r+2}, a_r + 3, \ldots, a_{r+n-m+1}).$$

Таким образом мы имеем представление

$$z^{(n+1)}(0)\bigg|_a = (n+1)H^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$$

$$= (n+1)\binom{n}{1}a_1H^{(n-1)}(a_2, a_3, \ldots, a_n) +$$

$$+(n+1)\binom{n}{2}a_1^2H^{(n-2)}(2a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}) + \cdots$$

$$+(n+1)\binom{n}{k}a_1^k H^{(n-k)}(ka_2, a_3, \dots, a_{n-k+1}) + \cdots$$

$$+(n+1)\binom{n}{n-1}a_1^{n-1}H^{(1)}((n-1)a_2) + (n+1)a_1^n; \tag{22}$$

$$z^{(n+1)}(0)\Big|_b = \binom{n}{1}(-(n+1)b_1)H^{(n-1)}(b_2, b_3, \dots, b_n) +$$

$$+\binom{n}{2}(-(n+1)b_1)H^{(n-2)}(2b_2, b_3, \dots, b_{n-1}) + \cdots$$

$$+\binom{n}{k}(-(n+1)b_1)^k H^{(n-k)}(kb_2, b_3, \dots, b_{n-k+2}) + \cdots$$

$$+\binom{n}{n-1}(-(n+1)b_1)^{n-1}H^{(1)}((n-1)b_2) + (-(n+1)b_1)^n \tag{23}$$

Так как $a_1 = -b_1 \neq 0$, то можно поделить на $(n+1)a_1$ равенства (22) и (23), при этом в равенстве (19) величину $-b_1$ заменим на a_1.

Тогда имеем разность

$$\frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)a_1}\Big|_a - \frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)a_1}\Big|_b = 0 =$$

$$= \left[nH^{(n-1)}(a_2, a_3, \dots, a_n) - nH^{(n-1)}(b_2, b_3, \dots, b_n\right] +$$

$$+\left[\binom{n}{2}a_1 H^{(n-2)}(2a_2, a_3, \dots, a_{n-1}) - \right.$$

$$\left. -\binom{n}{2}(n+1)a_1 H^{(n-2)}(2b_2, b_3, \dots, b_{n-1})\right] + \dots$$

$$+\left[\binom{n}{n-1}a_1^{n-2}H^{(1)}((n-1)a_2) - \right.$$

$$\left. -\binom{n}{n-1}(n+1)^{n-2}a_1^{n-2}H^{(1)}((n-1)b_2)\right] + \left[a_1^{n-1} - (n+1)^{n-1}a_1^{n-1}\right]. \tag{24}$$

Если в правой части равенства (24) мы обнаруживаем «равновесную» пару типа $\phi(a) - \phi(b)$, то перемещая слагаемое $-\phi(b)$ в левую часть, где пока еще стоит ноль, мы тем самым строим инвариант n-го порядка. Видно, что разность в первых квадратных скобках является равновесной парой. Разности во вторых квадратных скобках и последующих не являются равновесными и подлежат преобразованиям.

Далее рассмотрим, как этим путем получить инвариант 4-го порядка, исходя из равенства (24) при $n = 4$. Но прежде приведем несколько простых инвариантов на совокупности первых показателей, которые будут использованы как непосредственно, так и в качестве аргументов полиномов (в частности линейных функций), которые могут оказаться инвариантами.

$$\Delta_0 = \Delta_0(a) = \Delta_0(b) = a_1^2 = b_1^2;$$

$$\Delta_1 = \Delta_1(a) = 2a_2 - a_1 = 2b_2 - b_1 = \Delta_1(b);$$

$$\Delta_2 = \Delta_2(a) = a_2a_3 - a_2^2 = b_2b_3 - b_2^2 = \Delta_2(b);$$

$$\varkappa_1 = \varkappa_1(a) = a_2^2 - 2a_1a_2 + a_2a_3 = b_2^2 - 2b_1b_2 + b_2b_3 = \varkappa_1(b);$$

$$\varkappa_2 = \varkappa_2(a) = a_2(a_2 - a_1) = a_2b_2 = b_2(b_2 - b_1) = \varkappa_2(b);$$

$\varkappa_{1,k} = a_{k-1}a_k + b_{k-1}b_k$, $k = 2, 3, \ldots$ При $k = 2$ $\varkappa_{1,2} = \Delta_0$; при $k = 3$ $\varkappa_{1,3} = 2a_2a_3 - a_1\Delta_1$. $\varkappa_{2,k} = a_{k-1}a_ka_{k+1} + b_{k-1}b_kb_{k+1}$, $k = 2, 3, \ldots$.

При $k = 2$

$$\varkappa_{2,2} = \Delta_0\Delta_1. \tag{25}$$

Если равенство, которое преобразовывается (и делается попытка из него получить инвариант), содержит в правой части слагаемое типа $cb_1\varkappa$ (или типа $ca_1\varkappa$), где $\varkappa$ – инвариант, то это слагаемое можно представить в виде «равновесной» пары:

$$cb_1\varkappa = \frac{c}{2}(2b_1)\varkappa = \frac{c}{2}(b_1 - a_1)\varkappa = \frac{c}{2}b_1\varkappa - \frac{c}{2}a_1\varkappa \tag{26}$$

Используя формулы разложения (21), (22) и (23) получим представление

$$\left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_a = 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) +$$

$$+\binom{4}{2}a_1H^{(2)}(2a_2, a_3) + \binom{4}{3}a_1^2H^{(1)}(3a_2) + a_1^3 = 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) +$$

$$+4a_1\left(\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_a - 6a_1a_2 - a_1^2 + 3a_2^2\right) + 12a_1^2a_2 + a_1^3 = 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) +$$

$$+4a_1 \cdot \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_a + 12a_1a_2b_2 - 3a_1a_1^2. \tag{27}$$

Заметим, что в правой части этих равенств $\varkappa_2 = a_2b_2 = a_2(a_2 - a_1)$ — инвариант и $\Delta_0 = a_1^2 = b_1^2$ тоже инвариант.

Аналогично имеем

$$\left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_b = 4H^{(3)}(b_2,b_3,b_4) + \binom{4}{2}(5a_1)H^{(2)}(2b_2,b_3)+$$

$$+\binom{4}{3}(5a_1)^2H^{(1)}(3b_2) + (5a_1)^3 = 4H^{(3)}(b_2,b_3,b_4) + 4a_1\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b +$$

$$+16a_1\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b - 4(5a_1)\cdot 24a_1b_2 - 4(5a_1)\cdot 16a_1^2 + 4(5a_1)3b_2^2+$$

$$+300a_1^2b_2 + 125a_1^3 = 4H^{(3)}(b_2,b_3,b_4) + 4a_1\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b +$$

$$+48a_1\varkappa_3 + 108a_1\varkappa_2 + 13a_1\Delta_0, \tag{28}$$

где $\varkappa_3 = \varkappa_{1,3} = a_2a_3 + b_2b_3$ — инвариант (см. (25)).

Теперь рассматривая разность (27) и (28) получим уравнение

$$0 = \left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_a - \left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_b = 4\Big(H^{(3)}(a_2,a_3,a_4) - H^{(3)}(b_2,b_3,b_4)\Big)+$$

$$-48a_1\varkappa_3 - 96a_1\varkappa_2 - 16a_1\Delta_0.$$

Сократим правую часть этого равенства на 4 и представим множитель a_1 в виде $\frac{1}{2}2a_1 = \frac{1}{2}(a_1 - b_1)$ и получим в правой части «равновесные пары»:

$$0 = H^{(3)}(a_2,a_3,a_4) - H^{(3)}(b_2,b_3,b_4)+$$

$$-6(a_1-b_1)\varkappa_3 - 12(a_1-b_1)\varkappa_2 - 2(a_1-b_1)\Delta_0 =$$

$$=\Big[H^{(3)}(a_2,a_3,a_4) - H^{(3)}(b_2,b_3,b_4)\Big]-\Big[(a_1-b_1)(6\varkappa_3 + 12\varkappa_2 + 2\Delta_0)\Big].$$

Применяя обозначения, которые были введены в работе [1], получим инвариант в виде

$$\Delta_{3,6}(a) = H^{(3)}(a_2,a_3,a_4) - a_1\overline{\varkappa_3} = H^{(3)}(b_2,b_3,b_4) - b_1\overline{\varkappa_3} = \Delta_{3,6}(b) \tag{29}$$

где $H^{(3)}(a_2,a_3,a_4) = a_2^3 + 6a_2^2a_3 + 3a_2a_3^2 + 6a_2a_3a_4$, $\overline{\varkappa_3} = 6\varkappa_3 + 12\varkappa_2 + 2\Delta_0$ Так же, как в работе [1] осуществим проверку формулы (29) по известным чередующимся показателям $b_1 = b_3 = \beta$; $b_2 = b_4 = 1$, $a_1 = a_3 = -\beta$; $a_2 = 1-\beta$; $a_4 = \frac{1}{2} - \beta$. Имеем $H^{(3)}(a_2,a_3,a_4) = 1 - 12\beta + 27\beta^2 - 16\beta^3$,

$H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) = 1 + 12\beta + 3\beta^3$. Первая «равновесная» разность $H^{(3)}(a) - H^{(3)}(b) = -24\beta + 24\beta^2 - 16\beta^3$. Вторая «равновесная» разность $-(a_1 - b_1)\overline{\varkappa} = -2a_1\overline{\varkappa} = 24\beta - 24\beta^2 + 16\beta^3$. По этому примеру можно судить о надежности преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буланов А. П.* Об инвариантах на совокупности показателей взаимно обратных функций Ламберта, представленных цепными экспонентами // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зим. мат. шк. Воронеж, 2013. С. 295–303.

2. *Дубинов А. Е., Галидакис И. Н.* Явное решение уравнения Кеплера // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 3(139). С. 365–370.

3. *Galidakis I. N.* On an application of Lambert's W function to infinite exponentials // Complex Var. Theory Appl. 2004. Vol. 49, № 11. P. 759–780.

4. *Galidacis I. N.* On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z) = z$ // Complex Variables. 2005. Vol. 50, № 13. P. 977–997.

5. *Буланов А. П.* О рекуррентной формуле определения показателей обратной функции Ламберта // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зим. шк. Саратов, 2012. С. 29–32.

6. *Буланов А. П.* Цепные экспоненты и функции Ламберта // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 43. С. 64–71.

7. *Буланов А. П.* Шестой показатель обратной функции Ламберта, представленной цепной экспонентой // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозаводск. междунар. конф. Петрозаводск, 2012. С. 5–10.

8. *Буланов А. П.* Регулярность степеней бесконечной кратности // Изв. АНРФ. Сер. математическая. Т. 62, № 5. 1998. С. 49–78.

9. *Буланов А. П.* Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения // Мат. сб. 2001. Т. 192. № 11. С. 3–34.

УДК 517.51

APPROXIMATION BY C^∞ FUNCTIONS IN SOBOLEV–MORREY SPACES

V. I. Burenkov (Cardiff, UK and Astana, Kazakhstan)

burenkov@cf.ac.uk

M. Lanza de Cristoforis (Padova, Italy)

mldc@math.unipd.it

N. A. Kydyrmina (Karaganda, Kazakhstan)

nurgul-k@mail.ru

Let $\mathbb{N}$ denote the set of all natural numbers including 0. Throughout the paper, n is an element of $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.