Определение. Мы будем называть маску $m_0(\chi)$ *N-элементарной* ($N \in \mathbb{N}_0$), если она постоянна на множествах вида $\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\chi$ и ее модуль $|m_0(\chi)|$ принимает только два значения: 0 или 1, причем $m_0(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}) = 1$. В этом случае, масштабирующую функцию $\varphi(x)$ с преобразованием Фурье вида

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-n})$$

мы также будем называть *N-элементарной.*

N-элементарная функция φ называется *(N, M)-элементарной*, если $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^{\perp})$, т. е. $\mathrm{supp}(\hat{\varphi}) \subset \mathfrak{G}_M^{\perp}$ и она постоянна на всех подгруппах вида $\mathfrak{G}_{-N}\dot{+}g$. В этом случае *$(N, M)$-элементарным* мы также называем и преобразование Фурье этой функции — $\hat{\varphi}(\chi)$.

Теорема. *Пусть N — нечетное, $N = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть T — дерево, вершинами которого являются все возможные k-координатные векторы $\{\alpha_i\}_{i=1}^{k}, \alpha_i = 0, 1, ..., p-1$, причем корнем дерева является нулевой вектор, а последние координаты вершин первого порядка отличны от нуля. Каждый вектор повторяется в дереве только один раз. Тогда по такому дереву можно построить (N, M) элементарную масштабирующую функцию φ, причем $M = kh - N - 1$, где h — максимальная длина пути от листа к корню.*

В докладе будет приведен конкретный алгоритм построения функции по заданному дереву указанного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934—952.

2. *Lukomskii S. F.* Trees in Wavelet analysis on Vilenkin groups. URL : http://arxiv.org/abs/1303.5635 (дата обращения 20.09.2013).

УДК 517.5

КРАТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ–УОЛША С ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ[1]

С. К. Блошанская, И. Л. Блошанский (Москва, РФ)
ig.bloshn@gmail.com

1. Пусть $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — неубывающая функция. Через $\Phi(L)(\mathbb{I}^N)$ обозначим множество суммируемых на $\mathbb{I}^N = \{x \in \mathbb{R}^N :$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00417).

$0 \le x_j < 1,\ j = 1, \ldots, N\}$ функций f таких, что $\int\limits_{\mathbb{I}^N} \Phi(|f(x)|)dx < \infty$. Пусть $S_n(x; f)$, $n \in \mathbb{Z}_+^N$, — прямоугольная частичная сумма ряда Фурье по системе Уолша–Пэли функции $f \in \Phi(L)(\mathbb{I}^N)$, $N \ge 1$.

2. Рассмотрим M — множество чисел $\{1, \ldots, N\}$ и $k \in M$. Обозначим: $J_k = \{j_1, \ldots, j_k\}$, $j_s < j_t$ при $s < t$, и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1, \ldots, m_{N-k}\}$, $m_s < m_t$ при $s < t$, — непустые подмножества множества M. Будем также считать, что $J_0 = M \setminus J_N = \emptyset$.

Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ на сумму двух подпространств $\mathbb{R}[J_k]$ и $\mathbb{R}[M \setminus J_k]$, где $\mathbb{R}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0$ при $j \in M \setminus J_k\}$. Пусть Ω, $\Omega \subset \mathbb{I}^N$, — произвольное (непустое) открытое множество. Положим $W[J_k] = \Omega[J_k] \times \mathbb{I}[M \setminus J_k]$, где $\Omega[J_k] = pr_{(J_k)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция Ω на пространство $\mathbb{R}[J_k]$, $\mathbb{I}[M \setminus J_k] = \{x \in \mathbb{R}[M \setminus J_k] : 0 \le x_j < 1$ при $j \in M \setminus J_k\}$. Положим

$$W_k = \bigcup_{J_k \subset M} W[J_k] \quad \text{и} \quad W_k^0 = \bigcap_{J_k \subset M} W[J_k]. \tag{1}$$

В работе [1] (см. также [2]) было введено следующее понятие.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ ($\mu = \mu_N$ — N-мерная мера Лебега), $J_k \subset M$, $1 \le k \le N$, $N \ge 1$. Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_k$, если найдется множество W_k вида (1) такое, что $\mu(W_k \setminus \mathfrak{A}) = 0$, причем свойство $\mathbb{B}_k$ есть свойство $\mathbb{B}_k(W^0)$, если $W_k = W_k(W_k^0)$.

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $N \ge 2$, — произвольное множество, $\mu\mathfrak{A} > 0$. Нами в работах [3, 4] были получены критерии справедливости слабой обобщенной локализации почти всюду (СОЛ) для кратных рядов Фурье–Уолша функций из классов $L_p(\mathbb{I}^N)$, $p \ge 1$, $N \ge 2$ в терминах свойства $\mathbb{B}_2$ множества $\mathfrak{A}$. (Для кратных рядов Фурье–Уолша функций из класса $\Phi(L)(\mathbb{I}^N)$ справедлива на множестве $\mathfrak{A}$ СОЛ, если для любой функции $f \in \Phi(L)(\mathbb{I}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, существует такое подмножество $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mu\mathfrak{A}_1 > 0$, что $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x; f) = 0$ почти всюду (п.в.) на $\mathfrak{A}_1$[1]).

Пусть далее, $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+^k$, $j_l \in J_k$, $l = 1, \ldots, k$. Символом $n^{(\lambda)} = n^{(\lambda)}[J_k] = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ будем обозначать такой N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$

[1] Символ $n \to \infty$ означает у нас, что $\min\limits_{1 \le j \le N} n_j \to \infty$.

являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей (т.е. $n_j^{(\lambda+1)}/n_j^{(\lambda)} \geq q_j > 1$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, $j \in J_k$). В свою очередь, последовательности частичных сумм $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$ будем называть «J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм» ряда Фурье–Уолша.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 2$, $0 < \mu\mathfrak{A} < 1$, и пусть $2 \leq k \leq N$. Если существует множество W_k^0 вида* (1) *такое, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_k(W_k^0)$, то*

a) для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{2k-1}(\mathbb{I}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-1}, \\ n_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-1}}} S_{n^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x; f) = 0 \quad \textit{п.в. на} \quad W_k^0,$$

b) для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{2k-2}(\mathbb{I}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_N} S_{n^{(\lambda)}[J_N]}(x; f) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad W_k^0\,[1].$$

Теорема 2. *Для любого J_k ($J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, или $J_k = \emptyset$, $k = 0$) существует множество $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 2$, $0 < \mu\mathfrak{A} < 1$, и существует функция $f \in L_\infty(\mathbb{I}^N)$ такая, что $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$ и*

$$\varlimsup_{\substack{n_0 \to \infty, n_j = n_0,\, j \in J_k, \\ n_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_k}} |S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)| = +\infty \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{I}^N.$$

3. Результаты теорем 1 и 2, в частности, показывают, что если $N-1$ или N компонент «номера» $n \in \mathbb{Z}_+^N$ прямоугольной частичной суммы $S_n(x; f)$ будут элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей, то для любого k, $2 \leq k \leq N$, в классах Орлича справедливость СОЛ на множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$ определяется структурой и геометрией множества $\mathfrak{A}$, которые, в свою очередь, описываются свойством $\mathbb{B}_k$. При повышении гладкости рассматриваемых функций (т.е. при увеличении k) свойство $\mathbb{B}_{k-1}$ множества $\mathfrak{A}$ заменяется свойством $\mathbb{B}_k$, т.е.

[1]Для $N = 2$ можно доказать более сильный результат: для любого открытого (непустого) множества $\mathfrak{A}$ и для любой функции $f \in L(\log^+ L)(\log^+ \log^+ L)(\mathbb{I}^2)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x; f) = 0$ п.в. на $\mathfrak{A}$.

«жесткие» условия на геометрию и структуру множества $\mathfrak{A}$ (определяемые свойством $\mathbb{B}_{k-1}$) заменяются более «мягкими» условиями, накладываемыми на ту же геометрию и структуру множества $\mathfrak{A}$ (определяемыми уже свойством $\mathbb{B}_k$). В [1] проведены исследования поведения последовательностей прямоугольных частичных сумм тригонометрических рядов Фурье функций $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{I}^N)$, $f = 0$ на $\mathfrak{A}$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ ($\mathfrak{F}$ — некоторые подпространства L_1) в зависимости от структурно-геометрических характеристик множества $\mathfrak{A}$ (СГХ($\mathfrak{A}$)) и вида пространства $\mathfrak{F}$. Даны описания некоторых пар ($\mathfrak{F}$, СГХ($\mathfrak{A}$)).

4. Результат теоремы 1 интересно сравнить с результатами о сходимости кратных рядов Фурье–Уолша в классах Орлича, прямоугольные частичные суммы которых являются J_{N-1} или J_N-лакунарными последовательностями. В работе Д. К. Санадзе, Ш. В. Хеладзе [5] доказано: для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{2N-1}(\mathbb{I}^N)$

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-1}, \\ n_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-1}}} S_{n^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x; f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{I}^N,$$

а для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{2N-2}(\mathbb{I}^N)$

$$\lim_{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_N} S_{n^{(\lambda)}[J_N]}(x; f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{I}^N.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bloshanskii I. L.* Structural and Geometric Characteristics of Sets of Convergence and Divergence of Multiple Fourier Series of Functions which Equal Zero // Intern. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Proc. 2004. Vol. 2, № 2. P. 187–195.

2. *Блошанский И. Л.* Структурные и геометрические характеристики множеств сходимости и расходимости кратных разложений Фурье функций, равных нулю на некотором множестве // Вестник МГОУ. 2007. № 1. С. 3–13.

3. *Блошанская С. К., Блошанский И. Л.* Обобщенная локализация для кратных рядов Фурье–Уолша функций из $L_p, p \geq 1$ // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 2. С. 21–36.

4. *Блошанская С. К., Блошанский И. Л.* Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье-Уолша функций из $L_p, p \geq 1$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1996. Т. 214. С. 83–106.

5. *Санадзе Д. К., Хеладзе Ш. В.* О сходимости и расходимости кратных рядов Фурье–Уолша // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. 1977. Vol. 55, № 2. P. 93–106.