УДК 517.518

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СКАЧКА ФУНКЦИИ Φ-ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДА ФУРЬЕ

А. А. Кельзон (Санкт-Петербург, РФ)
kelzon@mail.ru

Пусть g — 2π-периодическая функция; $S_n(g;x)$ — частная сумма порядка n тригонометрического ряда Фурье этой функции. Б. И. Голубов [1] доказал, что если g имеет на периоде ограниченную p-вариацию $(p \geq 1)$ в смысле Н. Винера [2], то во всякой точке x' справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(2r+1)}(g;x')}{n^{2r+1}} = \frac{(-1)^r}{(2r+1)\pi}((g(x'+) - g(x'-)), \quad r = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Отметим, что частный случай формулы (1) при $r = 0$ для более узких классов функций был известен ранее [3], [4] (см. также [5, гл. III, § 9]).

В работах [6], [7] справедливость формулы (1) была установлена для более широкого класса функций, имеющих на периоде гармоническую ограниченную вариацию [8] (определение см. ниже).

Возникает вопрос, нельзя ли и далее расширять класс функций так, чтобы формула (1) сохраняла силу. Попытке в известной мере ответить на этот вопрос и посвящено настоящее сообщение.

Напомним необходимые определения.

Пусть функция f задана на отрезке $[a,b]$. Через $\{I_n\}, n = 1.2, \dots,$ обозначим последовательность непересекающихся интервалов $I_n = (a_n, b_n) \subset [a,b]$. Пусть далее $\Phi = \{\varphi_n\}$, $n = 1.2, \dots,$ —последовательность строго возрастающих выпуклых вниз функций, заданных на множестве неотрицательных чисел и таких. что $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ для всех n и x и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \infty \tag{2}$$

для всех $x > 0$.

Положим

$$V_\Phi(f; a, b) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|f(I_n)|), \tag{3}$$

где $f(I_n) = f(b_n) - f(a_n)$, а верхняя грань в (3) берется по всевозможным последовательностям интервалов $\{I_n\}$, удовлетворяющим описанным условиям. Если $V_\Phi(f; a, b) < \infty$, то говорят, что функция f имеет Φ-ограниченную вариацию на $[a, b]$. Это понятие было введено М. Шраммом [9].

В частном случае, когда $\varphi_n(x) = x^p$ при всех натуральных n, мы получим функцию ограниченной p-вариации в смысле Н. Винера [2]

Если же $\varphi_n(x) = x/n$, вместо $V_\Phi(f; a, b)$ пишут $V_H(f; a, b)$, и, если $V_H(f; a, b) < \infty$, то говорят, что функция f имеет гармоническую ограниченную вариацию на $[a, b]$. Это понятие было введено Д. Ватерманом [8].

В настоящей работе через ΦBV будем обозначать семейство 2π-периодических функций f, заданных на вещественной оси и таких, что cf является функцией Φ-ограниченной вариации на отрезке $[-\pi, \pi]$ при некотором $c > 0$. Через HBV будем обозначать семейство 2π-периодических функций, имеющих гармоническую ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$.

Пусть $\Phi\mathrm{BV}_0 = \{f \in \Phi\mathrm{BV} \mid f(\pi) = 0\}$. М. Шрамм [9] установил, что ΦBV является банаховым пространством, в котором норма определяется следующим образом.

Для $f \in \Phi\mathrm{BV}_0$

$$\|f\| = \inf\{k > 0 \mid V_\Phi(f/k; -\pi, \pi) \le 1\},$$

а для произвольной $f \in \Phi\mathrm{BV}$

$$\|f\| = |f(\pi)| + ||f - f(\pi)||.$$

Через CΦBV обозначим множество непрерывных функций, входящих в ΦBV. В [9] показано, что CΦBV также является банаховым пространством с той же нормой.

Сформулируем основной результат доклада.

Теорема. *Пусть последовательность функций Φ такова, что $\Phi BV \supset HBV$ ($\Phi BV \neq HBV$) и r — целое неотрицательное число. Тогда найдётся функция $g_0 \in C\Phi BV$ такая, что*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n^{(2r+1)}(g_0; 0)|}{n^{2r+1}} > 0.$$

Эта теорема показывает, что формула (1) не может быть перенесена на класс ΦBV, если он шире класса HBV.

Отметим, что тот факт, что формула (1) не может быть перенесена на класс всех непрерывных 2π-периодических функций, был подмечен Б. И. Голубовым [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б.И.* Определение скачка функции ограниченной p-вариа-ции по ее ряду Фурье // Мат. заметки. 1972. Т. 12(1). С. 19–28.

2. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coeffi-cients // J. Math. Phys. 1924. V. 3. P. 72–94.

3. *Fejer L.* Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus Fourier-reihe // J. Reine Angew. Math. 1912. Vol. 142, № 1. P. 165–188.

4. *Czillag P.* Über die Fourierkonstanten einer Funktion von Beschränkter Schwankung // Mat. Phys. Lapok. 1918. Vol. 27. P. 301–308.

5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 540 с.

6. *Avdispahiĉ M.* On the determination of the jump of a function by its Fourier series // Acta Math. Hung. 1986. Vol. 48, № 3–4. P. 267–271.

7. *Kvernadze G.* Determination of the jumps of a bounded function by its Fourier series // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 92, № 2. P. 167–190.

8. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Studia Math. 1972. Vol. 44, № 2. P. 107–117.

9. *Schramm M.* Functions of Φ-bounded variation and Riemann-Stiltjes integration // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 287, № 1. P. 49–63.

УДК 517.5

ПОЛНОТА СИСТЕМ ПРОИЗВОДНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ[1]

В. Э. Ким (Уфа, РФ)

kim@matem.anrb.ru

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область, $H(G)$ — пространство функций голоморфных в области G. В данном сообщении мы доказываем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $T : H(G) \to H(G)$ — линейный непрерывный оператор, такой что $\ker T \neq \{0\}$ и выполняется коммутационное соотношение $[T, D] = \hat{a}$, где D — оператор дифференцирования, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — произвольная константа, $\hat{a}$ – оператор умножения на константу a. Пусть $f \in \ker T$, $f \not\equiv 0$. Тогда система производных $\{f^{(n)}, n = 0, 1, \cdots\}$ полна в пространстве $H(G)$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00572).