Замечание 1. *Функцию (оператор) Грина задачи Дирихле* (1)–(2) *в единичном шаре в случае полиномиальных функций* $Q(x)$ *можно записать в виде*

$$G(x;\alpha)\cdot=\frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+l-1}}{(2s)!!(2s+2l)!!}\,\alpha^{n/2-1}(\Delta^s\cdot)(\alpha x)$$

и тогда решение (4) *задачи Дирихле в единичном шаре имеет вид*

$$u(x)=\int_0^1 G(x;\alpha)\,Q(x)\,d\alpha.$$

Пример 3. Опуская промежуточные выкладки устанавливается, что решение задачи Дирихле (1)–(2) при $Q(x)=x_i$, вычисленное по формуле (4), имеет вид

$$u_0(x)=x_i\frac{(|x|^2-1)^l}{(2,2)_l(n+2,2)_l}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карачик В. В.* Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // ЖВМ и МФ. 2011. Т. 51(9). С. 1674–1694.

2. *Карачик В. В., Антропова Н. А.* Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49(2). С. 250–254.

3. *Карачик В. В.* Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Журн. Сиб. федерал. ун-та. Математика и физика. 2012. Т. 5(4). С. 527–546.

УДК 517.987.4

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СДВИГОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА РАЗОМКНУТОМ КОНТУРЕ

Л. В. Карташева (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
kartasheva@mail.ru

Основным пространством $S_{m,n}$ является линеал функций $\varphi(t)$, имеющих неинтегрируемые степенно-логарифмические особенности на концах конутра $[a,b]$. Интегралы будем понимать в смысле конечной части по Адамару (обозначается F.P.).

Топология в $S_{m,n}$ вводится с помощью системы норм:

$$\|\varphi(t)\|_r = \max\left\{\|\varphi(t)\|_{L_p(\rho_1)}, \|\varphi'(t)\|_{L_p(\rho_2)}, \ldots, \|\varphi^{(p-1)}(t)\|_{L_p(\rho_r)}\right\},$$

$$\rho_i = (t-a)^{p(m+i)}(b-t)^{p(n+i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

$$\|\varphi(t)\|_{L_p(\rho_1)} = \left(\int\limits_L \rho_1 |\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad p > 1.$$

Рассматривается интегральное уравнение

$$Kf = A[\beta(t)]\beta'(t)f[\beta(t)] + B(t)f(t) + \underset{\vee}{T}\,Af + \underset{\vee}{S}\,Bf = g(t) \tag{1}$$

в пространстве обобщенных функций $S'_{m,n}$.

Коэффициенты $A(t)$, $B(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции на $[a,b]$, причем

$$A(t) = (t-\alpha_0)^{m_0}A_1(t), \quad B(t) = (t-\beta_0)^{\rho_0}B_1(t).$$

$\beta(t)$ — функция, обратная сдвигу $\alpha(t)$. $B_1(t)$, $A_1(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции на $[a,b]$.

Под выражениями $\underset{\vee}{T}\,Af$ и $\underset{\vee}{S}\,Bf$ понимаются функционалы, определяемые соответственно равенствами:

$$\underset{\vee}{T}\,Af = \left(f, \frac{A(t)}{\pi i \rho_0[\alpha(t)]}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho_0(\tau)}{\tau - \alpha(t)}\,d\tau\right); \quad \underset{\vee}{S}\,Bf = (f, -B\widehat{S}\varphi),$$

где

$$\widehat{S}\varphi = \frac{1}{\pi i \rho_0(t)}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho_0(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad \rho_0(t) = (t-a)^m(b-t)^n.$$

Решение уравнения (1) приводит к необходимости рассмотрения союзного уравнения:

$$K'\varphi \equiv A(t)\varphi[\alpha(t)] + B(t)\varphi(t) + \frac{A(t)}{\pi i \rho_0[\alpha(t)]}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho_0(\tau)}{\tau - \alpha(t)}\,d\tau -$$

$$- \frac{B(t)}{\pi i \rho_0(t)}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \tag{2}$$

в пространстве основных функций $S_{m,n}$.

Для нахождения решения уравнения (2) оно сводится к краевой задаче Газемана:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \frac{(t-\beta_0)^{p_0}}{(t-\alpha_0)^{m_0}} G_1(t) + \frac{\psi_1(t)}{(t-\alpha_0)^{m_0}}, \tag{3}$$

$$\psi_1(t) \in S_{m,n} \neq 0,\ \infty, \quad G_1(t) = \frac{B_1(t)}{A_1(t)} \neq 0,\ \infty.$$

Обозначим $\varkappa'$ индекс краевой задачи, соответствующей уравнению (2) и введем $\varkappa = -\varkappa'$.

Тогда, если $\varkappa + m_0 > 0$ рассмотрим два случая

1) $\varkappa > 0$. В этом случае получим решение уравнения (1) в виде

$$f = M'g + \sum_{k=1}^{\varkappa+m_0} a_k \Delta_k(t),$$

где a_k — постоянные, определяемые равенствами

$$a_k = (f(t) - M'g, \Phi_k(t)),$$

$\Phi_k(t)$ — система основных функций биортогональных системе обобщенных функций $\Delta_k(t)$.

2) $\varkappa < 0$. В данном случае решение задачи (1) имеет вид:

$$f = M'g + \sum_{k=1}^{\varkappa+m_0} a_k \nu_k(t).$$

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема. *При $\varkappa + m_0 \geqslant 0$ неоднородное уравнение* (1) *разрешимо при любой правой части $g(t) \in S'_{m,n}$, причем соответствующее однородное уравнение имеет $\varkappa + m_0 \geqslant 0$ линейно независимых решений в классе обобщенных функций.*

В случае $\varkappa + m_0 < 0$ решение уравнения (1) *единственно, причем для его существования необходимо и достаточно выполнение условий: $(g(t), \varphi_k(t)) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - m_0$) $\varphi_k(t) \in S_{m,n}$ и образуют полную систему решений однородного уравнения (2), союзного* (1).