Аналогично, всякий линейный ограниченный функционал $\Phi : D \to R$ может быть записан в виде

$$\Phi(x) = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \begin{pmatrix} \delta_1 x \\ \delta_2 x \\ \delta_3 x \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j r_j(x),$$

где линейные ограниченные функционалы $\Phi_1 : C(\bar{\Omega}) \to R$, $\Phi_2, \Phi_3 : C(\partial\Omega) \to R$, скаляры $\alpha_j \in R, j = 1, \ldots, n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исламов Г. Г.* Некоторые задачи теории линейных уравнений // Вестн. Удмуртск. ун-та. 2013. № 1. С. 17–28.

УДК 517.977, 519.21

О ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ МЕТОДЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ И ПОТРЕБЛЕНИЯ

Н. С. Исмагилов (Уфа, РФ)
niyaz.ismagilov@gmail.com

Рассматривается модель оптимального инвестирования и потребления инвестором, которому доступны два финансовых актива: рисковый и безрисковый [1]. Стоимость $P_0(t)$ безрискового актива подчиняется обыкновенному дифференцальному уравнению

$$dP_0(t) = rP_0(t)dt, \quad P_0(0) = p_0,$$

где r — постоянный коэффициент роста (процентная ставка вклада в банк).

Стоимость рискового актива предполагается изменяющейся по модели предложенной Мертоном [2] и Блэком и Шоулсом [3], согласно которой стоимость $P_1(t)$ рискового актива (стоимость акции) задается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ)

$$dP_1(t) = bP_1(t)dt + \sigma P_1(t)dW(t), \quad P_1(0) = p_1 > 0, \tag{1}$$

где b — постоянный коэффициентом роста, σ — постоянный коэффициентом волотильности. Предполагается, что уравнение (1) определено на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$, на котором задан стандартный винеровский процесс W_t.

При вложении $u_t X_t$ средств в рисковый и $(1-u_t)X_t$ в безрисковый активы, состояние инвестора X_t изменяется согласно СДУ [4]

$$dX_t = rX_t dt + X_t u_t (b-r)dt - C_t dt + u_t X_t \sigma(t) dW_t. \tag{2}$$

Здесь $u_t \in [0,1]$, C_t — скорость потребления.

Задача инвестора состоит в том, чтобы максимизировать функционал

$$J = \mathbf{E}\Big[\int\limits_0^T e^{-\beta t} U_1(C_t)dt + e^{-\beta T} U_2(X_T)\Big] \to \max, \tag{3}$$

который отражает выгоду от потребления в течении жизни и от оставленного наследства. В уравнении (3) $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания, функции полезности U_i предполагаются возрастающими и строго выпуклыми

На основе явной формулы для решений СДУ, представленной в работе [5], доказывается, что решение СДУ (2) имеет вид $X_t = \Phi(t, u_t W_t + y_t)$, где Φ — некоторая известная функция, а y_t является решением уравнения с мерами

$$dy_t = \frac{r\Phi + \Phi u_t(b-r) - \frac{1}{2}u_t^2 \sigma^2 \Phi - C_t}{\sigma\Phi} - W_t du_t.$$

Здесь Φ имеет аргументы $(t, u_t W_t + y_t)$. Такое представление позволило автору свести исходную стохастическую задачу (2)–(3) к детерминированной задаче импульсного оптимального управления

$$dy_t = \frac{r\Phi + \Phi u_t(b-r) - \frac{1}{2}u_t^2 \sigma^2 \Phi - C_t}{\sigma\Phi} - W_t d\theta_t, \tag{4}$$

$$du_t = d\theta_t, \tag{5}$$

$$J = \int_0^T e^{-\beta t} U_1(C_t)dt + e^{-\beta T} U_2(\Phi(T, u_T W_T + y_T)) \to \max. \tag{6}$$

В задаче (4)–(6) дифференциальные уравнения и функционал потерь содержат случайные функции, но не содержат стохастических дифференциалов и математического ожидания, поэтому эта задача для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ может рассматриваться как детерминированная задача, для решения которой могут быть применены методы детерминированной теории импульсного управления, например, принцип максимума [8].

Однако, потраекторное решение задачи (4)–(6) может оказаться упреждающим относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. На основе метода, который представлен в [6] и дополнен в [7], автором показано, что детерминированная задача может быть модифицирована таким образом, что решение модифицированной задачи является неупреждающей функцией и потраекторно совпадает с решением исходной стохастической задачи (2)–(3). Модифицированная потраекторно-детерминированная задача имеет вид

$$
\begin{aligned}
&dy_t = \frac{r\Phi + \Phi u_t(b-r) - \frac{1}{2}u_t^2\sigma^2\Phi - C_t}{\sigma\Phi} - W_t d\theta_t,\\
&du_t = d\theta_t,\\
&dz_t = e^{-\beta t}U_1(C_t)dt + \Lambda_1(t)u_t dt + \Lambda_2(t)d\theta_t,\\
&J = G^{\Lambda}(y_T, u_T, z_T) = z_T + e^{-\beta T}U_2(\Phi(T, u_T W_T + y_T)) \to \max .
\end{aligned}
$$

Здесь $\Lambda_1(t)$ и $\Lambda_2(t)$ неупреждающие процессы, вычисляемые на основе коэффициентов задачи (4)–(6). Суть модификации заключается в дополнении функционала выйгрыша слагаемыми, которые гарантируют достижение оптимума на неупреждающих функциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karatzas I., Lehoczky J., Shreve S. E.* Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon // SIAM J. Control & Optim. 1987. Vol. 25. P. 1157–1186.

2. *Merton R. C.* Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model // Review of Economics and Statistics. 1971. Vol. 3. P. 272–413.

3. *Black F., Scholes M. J* The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637–654.

4. *Harrison J. M., Pliska S. R* Martingales, stochastic integrals, and continuous trading // Stochastic Process. Appl. 1981. Vol. 11. P. 215–260.

5. *Насыров Ф. С.* Локальные времена, симметричные интегралы, стохастический анализ. М. : Физматлит, 2011. 211 с.

6. *Davis M. H. A. and Burstein, G.* A deterministic approach to stochastic optimal control, with application to anticipative control // Stochastics and Stochastics Reports. 1992. Vol. 40. P. 203–256.

7. *Исмагилов Н. С., Насыров Ф. С.* О детерминированном подходе к задаче стохастического оптимального управления // Вестн. УГАТУ. 2013. Т. 17. № 6.

8. *Arutyunov A. V., Karamzin D. Yu, Pereira F.* Pontryagin’s maximum principle for constrained impulsive control problems // Nonlinear Analysis. 2012. Vol. 75, № 3. P. 1045–1057.