Кочерова В. В. (Ярославль)
v.kocherova@gmail.com

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КВАЗИНОРМ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА – МАРЦИНКЕВИЧА

Пусть Ω — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $\mu(\Omega) = 1$.

Для функции $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ через f^* обозначим ее перестановку в невозрастающем порядке: $f^*(\tau) = \inf\{s > 0 : \lambda(f,s) < \tau\}$.

Рассматриваем при некоторых условиях и ограничениях задачу нахождения области эквивалентности для $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_k}{\varphi(k)} < \infty$ и $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_{L_k(t_k,t_{k-1})}}{\varphi(k)} < \infty$.

Теорема 1. *Пусть дана измеримая функция* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *и возрастающая функция* $\varphi : [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$, *удовлетворяющая при любых* $t \in [e^{-k}, e^{1-k})$ *и любых* $k \in \mathbb{N}$ *следующим условиям:* $\int\limits_1^\infty e^{1-\tau} (\varphi(\tau))^k \, d\tau \leq$ $\leq C_0(\varphi(k))^k$ *и* $\sup\limits_{l\geq 1} \dfrac{1}{(\varphi(l))^l} \sum\limits_{k=l+1}^{\infty} (\varphi(k))^l e^{-k} = C_1 < \infty$. *Тогда неравенство* $\sup\limits_{0<t<1} \dfrac{f^*(t)}{\varphi(\ln(e/t))} < \infty$ *выполнено тогда и только тогда, когда верно неравенство* $\sup\limits_k \dfrac{\|f\|_k}{\varphi(k)} < \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *измерима. Тогда* $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_k}{\varphi(k)} < \infty$ *тогда и только тогда, когда имеет место* $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_{L_k(t_k,t_{k-1})}}{\varphi(k)} < \infty$.

Следствие 1. *Следующие утверждения эквивалентны при* $\alpha > 0:$

(1*) $f \in L_{\exp t^\alpha}$;

(2*) $\sup\limits_{0<t<1} \dfrac{f^*(t)}{(\ln(e/t))^\alpha} < \infty$;

(3*) $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_{L_k(0,1)}}{k^\alpha} < \infty$;

(4*) $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_{L_k(t_k,t_{k-1})}}{k^\alpha} < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Trudinger N.* On Inbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications // J. Math. Mech. 1967. Vol. 17. P. 473–483.

2. *Edmunds D. E.* On Decomposition in Exponencial Orlizc Spaces // Math. Nachr. 2000. Vol. 213. P. 77–88.

3. *Edmunds D. E., Krbec M.* Two limiting cases of Sobolev Imbeddings // Houcton J. Math. 1995. Vol. 21. P. 119–128.

Г. Г. Кошелева (Москва)
gkosheleva@mail.ru

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ В КАЖДОЙ ТОЧКЕ

Одним из самых важных вопросов гармонического анализа является выяснение скорости сходимости ряда Фурье разлагаемой функции. Эту скорость изучают в различных метриках, в частности, в метрике $C[-\pi,\pi]$. Рассмотрим, например, классы $\mathrm{Lip}\,\alpha$ при $\alpha \in (0,1)$. Как известно, скорость сходимости ряда Фурье такой функции в метрике $C[-\pi,\pi]$ не может быть быстрее, чем $n^{-\alpha}$. Если коэффициенты Фурье при этом монотонны, то «плохой» точкой является 0 (с учетом периодичности), а в остальных точках ряд Фурье сходится быстрее. Нетрудно построить пример лакунарного ряда, скорость сходимости которого одинакова во всех точках отрезка. Здесь мы укажем простой пример функции класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$, имеющей одинаковую скорость сходимости в каждой точке, и такой, что модули ее коэффициентов Фурье монотонно невозрастают.

Пусть $T = [-\pi,\pi]$, $t \in T$ и $x = e^{it}$. Через $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ обозначим последовательностей полиномов Рудина – Шапиро ([1, 2]).

Теорема. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$ *и функция*

$$f(t) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\alpha+\frac{1}{2})} P_k(e^{it}) e^{i2^k t}.$$

Тогда $f(t) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$*, модули ее коэффициентов Фурье монотонно невозрастают и функция*

$$\varphi(t) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|f(t) - S_n(f;t)|}{n^{-\alpha}} \in (0,\infty)$$

при всех $t \in T$.

Работа выполнена в МГППУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shapiro H. S.* Extremal problems for polynomials and power series // Thesis for S. M. Degree, Massachusetts Institute of Technology, 1951.

2. *Rudin W.* Some theorems on Fourier coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 10. P. 855-–859.