М. И. Исмайлов (Баку)
miqdadismailov1@rambler.ru

О НЕРАВЕНСТВАХ РИССА – ФИШЕРА И ХАРДИ – ЛИТТЛВУДА С ВЕКТОРНОЗНАЧНЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

В работе получены аналоги результатов Рисса и Пэли для ортогональных систем, а также Харди – Литтлвуда для системы экспонент об оценке коэффициентов Фурье через функцию, и обратно.

Справедливы

Теорема 1. *Пусть $\{\varphi_n(y)\}_{n\in N}$ — ортонормированная система на $[c,d]$ такая, что п. в. на $[c,d]$ $|\varphi_n(y)|\le M$. Тогда для всякой измеримой на $[a,b]\times[c,d]$ функции $f\in L_q([a,b],L_p(c,d))$, $1<p\le 2$, $q=\frac{p}{p-1}$, последовательность $\overline{c(x)}=\{c_k(x)\}_{k\in N}\in l_q(a,b)$, где $c_k(x)=\int\limits_c^d f(x,y)\varphi_k(y)dy$ и $\left\|\{c_k\}_{k\in N}\right\|_{l_q(a,b)}\le M^{\frac{2-p}{p}}\left\|f\right\|_{L_q([a,b],L_p(c,d))}$.*

Теорема 2. *Пусть $\{\varphi_n(y)\}_{n\in N}$ – ортонормированый базис на $[c,d]$ такая, что почти всюду на $\underline{[c,d]}$ справедливо $|\varphi_n(y)|\le M$. Тогда для всякой последовательности $\overline{c(x)}=\{c_k(x)\}_{k\in N}\in l_p(a,b)$, $1<p\le 2$, существует функция $f\in L_p([a,b],L_q(c,d))$, $q=\frac{p}{p-1}$, для которой $c_k(x)$ коэффициенты ряда Фурье по системе $\{\varphi_n(y)\}_{n\in N}$ и*

$$\left\|f\right\|_{L_p([a,b],L_q(c,d))}\le M^{\frac{2-p}{p}}\left\|\{c_k\}_{k\in N}\right\|_{l_p(a,b)}.$$

Теорема 3. *1) пусть $f\in L_p((a,b)\times(0,2\pi))$, $1<p\le 2$. Тогда*

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(|k|+1)^{p-2}\int\limits_a^b|c_k(x)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\le M_p\left(\int\limits_a^b\int\limits_0^{2\pi}|f(x,t)|^p\,dtdx\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $c_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x,t)e^{-\mathrm{int}}dt$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$;

2) пусть $c_n(x), n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ — последовательность измеримых на $[a,b]$ функций такая, что $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(|k|+1)^{q-2}\int\limits_a^b|c_k(x)|^q\,dx<+\infty$, $q\ge 2$. Тогда существует функция $f\in L_q((a,b)\times(0,2\pi))$, для которой $c_n(x)$ коэффициенты ряда Фурье по системе экспонент $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$ и

$$\left(\int\limits_a^b\int\limits_0^{2\pi}|f(x,t)|^q\,dtdx\right)^{\frac{1}{q}}\le M_q\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(|k|+1)^{q-2}\int\limits_a^b|c_k(x)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. 658 с.

2. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958. 508 с.

С. Н. Кабанов, О. Е. Кузьмина (Саратов)
kabanoff@hotmail.com

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Рассмотрим уравнение вида

$$C_p y(x) := K_p K_{p-1} \dots K_1 y(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $K_l g(x) = \int\limits_0^x k_l(x-t)g(t)\,dt$, $l = \overline{1,p}$, $p \geq 1$, целое; $k_l(x)$, $f(x) \in L[0,1]$ — заданные функции.

Пусть функции $k_l(x)$ таковы, что для них существуют $k_l^* \in L[0,1]$ такие, что

$$\int\limits_0^x k_l(x-t)k^*(t)\,dt \equiv 1, \quad x \in [0,1], \quad l = \overline{1,p}. \tag{2}$$

Имеют место

Лемма. *Оператор вида* $D_p = DK_1^* DK_2^* \dots DK_p^*$, *где* $DK_l^* g(x) = \frac{d}{dx} K_l^* g(x)$, $K_l^* g(x) = \int\limits_0^x k_l^*(x-t)g(t)\,dt$, *является обратным для оператора* C_p *в следующем смысле*

$$D_p C_p y(x) \overset{п.\,в.}{=} y(x), \quad x \in [0,1],$$

$$C_p D_p y(x) \overset{п.\,в.}{=} y(x) - \omega_p(0)k_p(x) - \omega_{p-1}(0)k_p(x) * k_{p-1}(x) - \dots -$$
$$- \omega_1(x) k_p(x) * \dots * k_1(x),$$

где $\omega_p(x) = K_p^* y(x)$, $\omega_{p-1}(x) = K_{p-1}^* DK_p^* y(x), \dots, \omega_1 = K_1^* DK_2^* \dots DK_p^* y(x)$. *Знак* $*$ *обозначает свертку.*

Теорема. *Для того, чтобы интегральное уравнение* (1) *имело решение* $y(x) \in L[0,1]$ *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) функции $\omega_1(x), \dots, \omega_p(x)$ *—- абсолютно непрерывны на* $[0,1]$;

2) $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \dots = \omega_p(0) = 0$.