И. А. Иванишко, В. Г. Кротов, А. И. Порабкович (Минск)
ivanishko@bsu.by, krotov@bsu.by, dobrinia@bk.ru

ТЕОРЕМА КАМПАНАТО НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой, причем $\mu(B(x, 2r)) \leq c\mu(B(x, r))$.

Обозначим Ω класс функций $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям $\omega(+0) = 0$, $\omega(t)t^{-a}$ возрастает и $\omega(t)t^{-b}$ убывает при некоторых $0 < a < < b < +\infty$. Для $\omega \in \Omega$ введем обобщенный класс Гельдера $H^\omega(X)$ как

$$H^\omega(X) = \left\{ f : \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(d(x, y))} < +\infty \right\}.$$

Для шара $B \subset X$ r_B означает его радиус, f_B — среднее значение функции f по шару $B \subset X$.

Теорема. *Пусть $f \in L^p(X)$, $p \geq 1$, $\omega \in \Omega$. Тогда условие*

$$\sup_B \frac{1}{\omega(r_B)} \left(\fint_B |f(x) - f_B|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} < +\infty$$

равносильно тому, что функция f эквивалентна некоторой функции из класса $H^\omega(X)$.

В случае, когда $\omega(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию $\mu(B(x, r) \cap X) \geq cr^n$ (c не зависит от $x \in X$ и $0 < r < \operatorname{diam}(X)$) это — классическая теорема Кампанато [1], важная при изучении регулярности решений эллиптических уравнений в частных производных.

Доказательство теоремы основано на неравенствах из работы [2] первых двух авторов. При некоторых дополнительных ограничениях на пространство X для $\omega(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ утверждение теоремы было получено другим способом в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Campanato S.* Proprieta di holderianita di alcune classi di funzioni // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 1963. Vol. 17, № 1–2. P. 175–188.

2. *Иванишко И. А., Кротов В. Г.* Обобщенное неравенство Пуанкаре – Соболева на метрических пространствах // Тр. ИМ НАН Беларуси. 2006. Т. 14, № 1. С. 51–61.

3. *Gorka P.* Campanato theorem on metric measure spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. 2009. Vol. 34. P. 523–528.