

М. П. Ефимова, М. А. Ефимов (Москва)
efimova.margarita@gmail.com, efimov.mikhail@gmail.com

О ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННОЙ В ОБОБЩЕННОМ Q -ИНТЕГРАЛЕ¹

Определение. Измеримая действительнзначная функция f Q -интегрируема в обобщенном смысле на отрезке $[a, b]$, если, полагая

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & \text{при } |f(x)| \leq n \\ n \operatorname{sgn} f(x), & \text{иначе,} \end{cases}$$

имеем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x)]_n dx$ существует; этот предел назовем обобщенным

Q -интегралом от функции f и обозначим $(Q_{об}) \int_a^b f(x) dx$.

Следуя работе [1], можно получить следующее необходимое и достаточное условие замены переменной в обобщенном Q -интеграле:

Утверждение. Пусть $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$. Тогда для того, чтобы функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ была Q -интегрируема в обобщенном смысле на $[\alpha, \beta]$, и выполнялось равенство

$$(Q_{об}) \int_a^b f(x) dx = (Q_{об}) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

для любой Q -интегрируемой в обобщенном смысле на $[a, b]$ функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало множество полной меры $E \subset [\alpha, \beta]$, представимое в виде $E = E_1 \cup E_2$ таким образом, чтобы $\varphi'(t) = t$ для любого $t \in E_1$, $t \neq 0$, и $\varphi'(t) = 0$ для любого $t \in E_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бонди И. Л. Замена переменной в A -интеграле // Учен. записки Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. 1962. № 188. С. 3–21.
2. Ефимова М. П. О свойствах Q -интеграла // Мат. заметки. 2011. Т. 90(3). С. 340–350.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).