непрерывна в точке $z_0 \in \partial G$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывен логарифмический потенциал $u_\Gamma(z) := \int_\Gamma \log(1/|\zeta - z|)\, d\vartheta(\zeta)$ по мере, естественно порождаемой на Γ неубывающей функцией $\vartheta(\zeta)$ — углом наклона правой полукасательной выпуклой кривой Γ в точке $\zeta \in \Gamma$ к положительному направлению действительной оси (при $z \notin \Gamma$ интеграл $u_\Gamma(z)$ можно понимать как интеграл Стилтьеса вдоль кривой Γ в её положительном направлении).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долженко Е. П.* Оценки модулей непрерывности конформных отображений областей вблизи их достижимых граничных дуг // Мат. сб. 2011. № 12. С. 57–106.

2. *Долженко Е. П., Колесников С. В.* О поведении конформных отображений областей вблизи их выпуклых граничных дуг // Мат. заметки. 2011. Т. 90, вып. 4. С. 501–516.

С. И. Дудов (Саратов)
dudovsi@info.sgu.ru

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА: МЕТОД ИЗОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

Пусть $\varphi(x)$ — функция, определенная на открытом выпуклом множестве S из $\mathbb{R}^p$ и множество $D \subset S$.

Рассмотрим задачу

$$\varphi(x) \longrightarrow \max_{x \in D}. \qquad (1)$$

Очевидно, факт достижения в точке $x_0 \in D$ функцией $\varphi(x)$ своего максимального значения на D эквивалентен выполнению включения

$$D \subset G(x_0) = \{x \in S : \varphi(x) \le \varphi(x_0)\}. \qquad (2)$$

Определение. Говорят, что отображение $L : \mathbb{R}^p \times 2^{\mathbb{R}^p} \to 2^{\mathbb{R}^q}$, сопоставляющее каждой точке $x \in \mathbb{R}^p$ и множеству $A \subset \mathbb{R}^p$ некоторое множество $L(x, A) \subset \mathbb{R}^q$, является *изотонным* (по включению), если

$$A \subset B \Rightarrow L(x, A) \subset L(x, B), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p; \quad A, B \subset \mathbb{R}^p.$$

Как следует из (2), в качестве источника получения необходимых условий решения задачи (1) можно использовать включение

$$L(x, D) \subset L(x, G(x_0)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

Такой подход требует наличия эффективного исчисления отображения $L(x, A)$ для различных форм задания множества A, что предполагает геометрическую или аналитическую простоту его образов.

Примерами изотонных отображений являются:

– конус допустимых направлений множества в точке

$$\gamma(x, A) = \{g \in \mathbb{R}^p / \exists\ \alpha_g > 0 : x + \alpha g \in A,\ \forall\ \alpha \in (0, \alpha_g)\},$$

– коническая оболочка сдвинутого множества

$$K(A - x) = \{g \in \mathbb{R}^p / \exists\ \alpha > 0,\ a \in A :\ a = x + \alpha g\}.$$

Теорема 1 (Н. У.). *Если x_0 — точка максимума функции $\varphi(x)$ на множестве D, то справедливы включения*

$$\gamma(x, D) \subset \gamma(x, G(x_0)), \quad \forall\ x \in D, \tag{3}$$

$$K(D - x) \subset K(G(x_0) - x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^p. \tag{4}$$

Теорема 2 (Д. У.). *Если $\varphi(x)$ непрерывная на S функция и для точки $x_0 \in D$ справедливы включения*

$$K(D - x) \subset \gamma(x, G(x_0)), \quad \forall x \in S :\ \varphi(x) = \varphi(x_0), \tag{5}$$

то x_0 — точка максимума функции $\varphi(x)$ на множестве D.

В процессе доклада будет показано как, выражая правые части в (3)–(5) через используемые дифференциальные характеристики функции $\varphi(x)$ и проводя элементарные преобразования, нетрудно получить результаты [1, 2]. Также будут приведены новые результаты по характеризации глобального максимума, полученные с помощью теорем 1, 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стрекаловский А. С.* К проблемам глобального экстремума в невыпуклых экстремальных задачах // Изв. вузов. Математика. 1990. № 8. С. 74–80.

2. *Hiriart-Urruty I.-B. Ledyaev Yu. S.* A note on the characterization of the global maxima of a (tangentially) convex function over a convex set // J. of Convex Analysis. 1996. Vol. 3, № 1. P. 55–61.