Показано, что при выполнении ряда условий на фиксированные полюса эти операторы ограничены в весовых пространствах $C_w$, т.е. $\|wV_n^*(f)\| \le c\,\|wf\|$.


СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виденский В. С.* Замечание о рассмотренных А. Лупасом рациональных линейных операторах // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования ("Герценовские чтения – 2008"). СПб.: РГПУ имени А.И. Герцена, 2008. С. 134–146.

2. *Della Vecchia B., Mastroianni G., Szabados J.* Weighted approximation of functions with endpoint or inner singularities by Bernstein operators // Acta Math. Hugar. 2004. Vol. 103. P. 19–41.



**Е. П. Долженко (Москва)**

**eugen@ngcom.ru**


## ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЕЙ[1]

*Модулем колебания* жордановой кривой $L$ — замкнутой, либо разомкнутой (то есть дуги — с концами, или без них) — назовем функцию $d(L;\delta) := \sup\{d(L;z,t) : \ z,t \in L, \ |z-t| \le \delta\}$ $(\delta \ge 0)$, где $d(L;z,t)$ обозначает либо диаметр дуги $L(z,t) \subset L$ с концами $z$, $t$ — это в случае разомкнутой кривой $L$, либо меньший из диаметров двух дуг $L(z,t) \subset L$ с концами $z$, $t$ — в случае замкнутой кривой $L$. Определение *модуля спрямляемости* $m(L;\delta)$ кривой $L$ мы получим, заменив здесь диаметр $d(L;z,t)$ дуги $L(z,t)$ её длиной $|L(z,t)|$. Спрямляемую жорданову кривую $L$ называют *лаврентьевской* (в память акад. М.А.Лаврентьева), если $m(L;\delta) \le c\delta \ \forall\,\delta \ge 0$ при некотором $c = \mathrm{const} \ge 1$. Очевидно, что выпуклые кривые являются лаврентьевскими.

Пусть функция $g(x)$ задана и не убывает при $x \ge 0$ (она может иметь разрывы–скачки), $g(x) \ge x$, $g(0) = g(0+) = 0$.

Определим 4 класса жордановых кривых $L$ (ниже $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$). Скажем, что $L \in J(g)$ (или что $L \in J(g,\varepsilon)$), если $d(L;\delta) \le g(\delta) \ \forall\,\delta \ge$ $\ge 0$ (соответственно, $\forall\,\delta \in [0,\varepsilon]$), и что $L \in J_0(g)$ (или что $L \in J_0(g,\varepsilon)$), если $m(L;\delta) \le g(\delta) \ \forall\,\delta \ge 0$ (соответственно, $\forall\,\delta \in [0,\varepsilon]$). Соотношения между этими классами очевидны, отметим лишь следующие: $J(g) \subset J(g,\varepsilon) \ \forall\,\varepsilon > 0$, $J(g) = \cap_{\varepsilon>0} J(g,\varepsilon)$ и аналогичные соотношения для $J_0$. Отметим ещё, что *каждая* жорданова кривая принадлежит некоторому классу $J(g)$, а в случае её спрямляемости — также и некоторому классу $J_0(g)$ (обычно с иным $g$).


[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00952а).

Ниже $w = \varphi(z)$ — однолистное конформное отображение некоторой односвязной области $G \subset \mathbf{C}$ на круг $D: |z| < 1$, $\psi$ — обратное отображение, $\omega(f, E, \delta)$ — обычный модуль непрерывности функции $f$ на множестве $E$. Пусть $d_g(x) := (\pi^2/4)g^2(\sqrt{x}) + x/2$ и $m_g(x) := (g(\sqrt{x}) + \sqrt{x})^2/4$, а $d_g^{-1}(y)$ и $m_g^{-1}(y)$ — обратные к ним функции; $D_g(x) := \int_1^x dy/d_g^{-1}(y)$ и $M_g(x) := \int_1^x dy/m_g^{-1}(y)$, а $D_g^{-1}(y)$ и $M_g^{-1}(y)$ — обртные к ним функции.

Утверждения приводимых ниже теорем 1–3 доказаны в работе [1].

**Теорема 1.** $\partial G \in J(g, \varepsilon) \Rightarrow \omega(\varphi, \overline{G}, \delta) \leq A\sqrt{g(\delta)}$.

**Теорема 2.** $\partial G \in J(g, \varepsilon) \Rightarrow \omega(\psi, \overline{D}, \delta) \leq B\, g(\sqrt{D_g^{-1}(\log\delta)}\,)$.

$$\partial G \in J_0(g, \varepsilon) \Rightarrow \omega(\psi, \overline{D}, \delta) \leq B_0\, g(\sqrt{M_g^{-1}(\log\delta)}\,).$$

**Теорема 3.** $\partial G \in J_0(g, \varepsilon)$ & $g(x) \leq cx\ \forall\, x \geq 0 \quad \Rightarrow$

$$\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \leq B_1\, \delta^{\alpha(c)}, \quad \alpha(c) = (2/\pi)\operatorname{arcctg}(4B(c)),$$

$B(c) = c^2(\beta(c) - \sin\beta(c))/(2\beta^2(c)) \quad (B(1) = 0)$, $\beta(c)$ — корень уравнения $(\beta/2)/\sin(\beta/2) = c\ (c > 1)$, $\beta(c) \in [0,\, 2\pi]$. Положительные $A$, $B$, $B_0$ и $B_1$ не зависят от $\delta \geq 0$.

При указанных условиях все неравенства содержательны.

**Следствие 1.** Пусть $k = \mathrm{const} \in (0,\, 1]$, $K = \mathrm{const} > 0$, $g(x) \leq K\, x^k\ \forall\, x \in [0, \varepsilon]$, $\partial G \in J(g, \varepsilon)$. Тогда $\omega(\varphi, \overline{G}, \delta) \leq A_1\, \delta^{k/2}\ \forall\, \delta \geq 0$.

**Следствие 2.** Пусть $c = \mathrm{const} > 1$, $k = \mathrm{const} \in (0,\, 1]$, $g(x) \leq cx^k\ \forall\, x \in [0, \varepsilon]$, $\partial G \in J_0(g, \varepsilon)$. Тогда

$$\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \leq B_2\, \delta^{\alpha(c)} \quad \forall\, \delta \geq 0 \quad - \text{\textit{при}}\ \ k = 1,$$

$$\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \leq \frac{B_4}{(1 + |\log\delta|)^{\nu(k)}}, \quad \nu(k) = \frac{k^2}{2 - 2k} \quad \forall\, \delta \in [0,\, 2]$$

— *при* $0 < k < 1$, ($A_1$, $B_2$, $B_4$ положительны и не зависят от $\delta$).

См. также статью Е. П. Долженко в ДАН. 2007. 415 (2). С. 155–159.

В работе [2] доказано в частности, что каждое конформное отображение $w = \varphi(z)$ ограниченной выпуклой области $G$ на круг $D$ имеет на $\overline{G}$ ограниченную производную $\varphi'(z)$ (так что $\varphi \in \mathbf{Lip}\,1$ на $\overline{G}$).Там же построена такая ограниченная выпуклая область $G$ с гладкой границей $\Gamma = \partial G$, что в некоторой точке $z_0 \in \partial G$ функция $\varphi'(z)$ разрывна (относительно $\overline{G}$). Найден критерий непрерывности $\varphi'(z)$ $(z \in \overline{G})$ относительно $\overline{G}$ в какой-либо заданной точке $z_0 \in \partial G$, состоящий в следующем: $\varphi'(z)$

непрерывна в точке $z_0 \in \partial G$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывен логарифмический потенциал $u_\Gamma(z) := \int_\Gamma \log(1/|\zeta - z|)\, d\vartheta(\zeta)$ по мере, естественно порождаемой на $\Gamma$ неубывающей функцией $\vartheta(\zeta)$ — углом наклона правой полукасательной выпуклой кривой $\Gamma$ в точке $\zeta \in \Gamma$ к положительному направлению действительной оси (при $z \notin \Gamma$ интеграл $u_\Gamma(z)$ можно понимать как интеграл Стилтьеса вдоль кривой $\Gamma$ в её положительном направлении).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долженко Е. П.* Оценки модулей непрерывности конформных отображений областей вблизи их достижимых граничных дуг // Мат. сб. 2011. № 12. С. 57–106.

2. *Долженко Е. П., Колесников С. В.* О поведении конформных отображений областей вблизи их выпуклых граничных дуг // Мат. заметки. 2011. Т. 90, вып. 4. С. 501–516.

**С. И. Дудов (Саратов)**
**dudovsi@info.sgu.ru**

## ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА: МЕТОД ИЗОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

Пусть $\varphi(x)$ — функция, определенная на открытом выпуклом множестве $S$ из $\mathbb{R}^p$ и множество $D \subset S$.

Рассмотрим задачу

$$\varphi(x) \longrightarrow \max_{x \in D}. \qquad (1)$$

Очевидно, факт достижения в точке $x_0 \in D$ функцией $\varphi(x)$ своего максимального значения на $D$ эквивалентен выполнению включения

$$D \subset G(x_0) = \{x \in S : \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}. \qquad (2)$$

**Определение.** Говорят, что отображение $L : \mathbb{R}^p \times 2^{\mathbb{R}^p} \to 2^{\mathbb{R}^q}$, сопоставляющее каждой точке $x \in \mathbb{R}^p$ и множеству $A \subset \mathbb{R}^p$ некоторое множество $L(x, A) \subset \mathbb{R}^q$, является *изотонным* (по включению), если

$$A \subset B \Rightarrow L(x, A) \subset L(x, B), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p; \quad A, B \subset \mathbb{R}^p.$$

Как следует из (2), в качестве источника получения необходимых условий решения задачи (1) можно использовать включение

$$L(x, D) \subset L(x, G(x_0)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).