А. В. Голубь (Саратов)

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ДОПУСКАЮЩЕЙ РАЗРЫВ

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int\limits_0^{\theta(x)} f(t)\,dt,$$

где $\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, т. е. $\theta(\theta(x)) \equiv 1$, и имеет разрыв первого рода.

Через $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ обозначим резольвенту Фредгольма.

Справедлив следующий результат.

Теорема. *Пусть* $f(x) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap V\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *при* $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) \in$ $\in C\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap V\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *при* $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f(0) = f(1)$, $f\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 0$. *Тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda \right| = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубь А. В. Теорема равносходимости разложений по собственным функциям интеоператора специального вида // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 15–17.

П. В. Григорьев, Т. Н. Сабурова (Москва)
taniasab37@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ БАЗИСАХ В КЛАССЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Один из первых базисов, построенных в пространстве $C[0, 1]$, был базис Фабера – Шаудера (БФШ) – $\{\varphi\}$ (см., например, [1]). Ранее мы ввли в рассмотрение базисы типа Фабера – Шаудера (БТФШ) – $\{g\}$, которые строятся по тому же принципу, что и БФШ, посредством одной порождающей функции $g(x)$ (см. [2]).

Для удобства дальнейшего изложения обозначим $A\alpha(M)$ класс функций $f(x) \in C[0, 1]$, у которых коэффициенты Фурье по БФШ удовлетворяют неравенству $|a_m(f, \varphi)| < M2^k$, где $m = 2k + l$ ($k \geq l$, $1 \leq l \leq 2^k$); G – множество функций $g(x)$, порождающих БТФШ; пусть далее $F_k(g) = \sum\limits_{n=2^k+1}^{n=2^{k+1}} g_n(x)$; $R_n(f,g) = f(x) - \sum\limits_{m=0}^{n} a_m(f,g)g_m(x)$ – остаток разложения $f(x)$ по БТФШ $\{g\}$.

В предыдущих работах были получены следующие результаты (см. [2]).

Теорема 1. *Для вложения* $A\alpha(M) \subset G$ *необходимо и достаточно, чтобы* $M < 2^{\alpha} - 1$.

Теорема 2. *Если* $g(x) \in A\alpha(M)$ *и* $M < 2^{\alpha} - 1$, *то* $|R_n(f,g)| \leq$ $\leq B_1\omega_2(1/\sqrt{n}, f) + B_2/n^{\varepsilon}$, *где* $\varepsilon = \varepsilon(a, M)$.

Напомним, что для самой системы ФШ справедлива оценка: $|R_n(f,\varphi)| \leq \omega_2(1/n, f)$ (см.[3]). Таким образом, оценка в теореме 2, заведомо хуже оценки для БФШ. Однако для конкретных случаев эта общая оценка может быть улучшена. Получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть дан БТФШ* $\{g\}$, *тогда любая функция* $u(x) =$ $= \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^{sk}F_{sk}(g)$, $|q| < 1$ *порождает БТФШ* $\{u\}$ *и* $|R_n(f,u)| = O(|R_n(f,g)|$.

Эта теорема показывает, что преход к БТФШ, указанного вида, сохраняет порядок приближения функций.

Например, рассмотрим классическую функцию, построенную вандер-Варденом как пример нигде не дифференцируемой функции $v(x) =$ $= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} F_{2n}(\varphi)$. Согласно нашей теореме она порождает БТФШ и $|R_n(f,v)| = O(\omega_2(f, 1/n)$. То есть «плохая» функция может хорошо приближать «хорошие» функции. В некоторых случаях переход к построенным выше базисам может даже улучшить скорость приближения. Так, например, функция $t(x) = 4x(1-x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} F_k(\varphi)$ порождает БТФШ (впервые рассмотренный Шайдуковым К.М. в [4]), для которого справедлива оценка $|R_n(f,t)| \leq 4\omega_3(f, 1/n)$.

Сходство данного БТФШ $\{g\}$ и базисов, порожденных функциями, рассматриваемыми в теореме 3 состоит еще и в том, что их можно «тасовать». А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если подпоследовательность* $\{g_{m_k}(x)\}$ *базиса* $\{g\}$ *заменить соответствующей подпоследовательностью* $\{u_{m_k}(x)\}$ *базиса* $\{u\}$, *то полученная система функций* $\{s\} = \{s_m(x)\}$ *будет базисом в* $C[0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кашин Б. С.,Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.

2. *Сабурова Т. Н.* О базисах в $C[0,1]$ типа Фабера – Шаудера // Теория

функций и приближений : Тр. 3-й Сарат. зимней школы, 1986. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. 3. С. 44–46.

3. *Матвеев В. А.* О рядах по системе Шаудера // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 3. С. 267–278.

4. *Шайдуков К. М.* О базисах в пространстве непрерывных функций, построенных из дуг парабол // Учен. записки Казанск. ун-та. 1965–1966. Т. 125, кн. 2. С. 133–142.

Е. В. Губкина (Горно-Алтайск)
HelenVl@bk.ru

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ НА СКАЧКЕ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА[1]

При моделировании течения воды в каналах прямоугольного сечения применяются уравнения мелкой воды [1], которые в случае горизонтального дна, без учета влияния трения имеют вид

$$w_t + q_x = 0, \tag{1}$$

$$q_t + (qu + ghv/2)_x = gh^2 b_x/2, \tag{2}$$

где $h = h(t,x)$ — глубина воды, $q = q(t,x)$ — расход воды в поперечном сечении канала, $w = w(t,x) = bh$ — площадь поперечного сечения потока, $b = b(x)$ — ширина канала, $u = u(t,x) = q/w$ — средняя по сечению скорость потока.

Рассматривается задача (1), (2) о разрушении плотины, на скачке площади сечения

$$b(0,x) = \begin{cases} b_l, & x < 0 \\ b_r, & x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad w(0,x) = \begin{cases} w_l, & x < 0 \\ w_r, & x > 0 \end{cases}$$

где $w_l = b_l h_l$, $w_r = b_r h_r$, $b_l > b_r$. Решение этой задачи, найдено в виде комбинации простых волн: центрированной r-волны понижения R, прерывной волны S, распространяющейся с постоянной скоростью по фону h_r, и неподвижного гидравлического прыжка L.

В лабораторных экспериментах такая задача моделируется путем резкого удаления плоского щита, разделяющего покоящиеся жидкости различных уровней.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-98001-р-сибирь-а).