М. О. Голубев (Москва)
maksimkane@mail.ru

МЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И СИЛЬНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ[1]

Пусть H — гильбертово пространство над вещественным полем скаляров, $B_R(x) = \{y \in H : \|y - x\| \leq R\}$ — замкнутый шар радиуса $R \geq 0$ с центром в точке $x \in H$. Метрической проекцией точки $x \in H$ на множество $A \subset H$ называется множество $P_A(x) = \{a \in \in A : \|x - a\| = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|\}$. Нормальным конусом к замкнутому множеству A в точке $a \in A$ называется множество $N(A; a) = \{p \in \in H : (p, a) \geq \sup\limits_{x \in A}(p, x)\}$. Пусть $U_\varrho(A) = \{x \in H : \inf\limits_{y \in A} \|x - y\| < \varrho\}$.

Хорошо известно, что для выпуклого и замкнутого множества $A \subset H$ множество $P_A(x)$ одноточечно, т. е. $P_A(x) = \{a(x)\}$, и для любых точек $x_0, x_1 \in H$ выполняется $\|a(x_0) - a(x_1)\| \leq 1 \cdot \|x_0 - x_1\|$.

С помощью результатов [1, гл. 4] М. В. Балашовым было показано, что выполнено

Предложение 1. [2] *Пусть подмножество $A \subset H$ выпукло и замкнуто. Пусть число $C \in [0; 1)$ таково, что для всех точек $x_0, x_1 \in \in H \backslash U_\varrho(A)$ выполняется неравенство $\|a_0 - a_1\| \leq C\|x_0 - x_1\|$. Тогда множество A есть пересечение шаров радиуса $R = \dfrac{C\varrho}{1 - C}$.*

Теорема 1. [2] *Пусть непустое множество $A \subset H$ имеет вид $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x)$. Тогда для любых точек $x_0, x_1 \in H \backslash A$ выполнена оценка*

$$\|a_0 - a_1\| \leq \frac{R}{\sqrt{(R + \varrho_0)(R + \varrho_1)}} \cdot \sqrt{\|x_0 - x_1\|^2 - (\varrho_0 - \varrho_1)^2}, \qquad (1)$$

где $\{a_i\} = P_A(x_i)$, $\varrho_i = \|x_i - a_i\|$, $i \in \{0, 1\}$.

В работах [3, 4] было введено новое понятие радиуса кривизны по направлению. С помощью радиуса кривизны по направлению был получен результат, аналогичный формуле (1), для C^2-гладких выпуклых аппроксимативно компактных многообразий.

Однако, как показано в [4, теорема 4.2], для негладких выпуклых множеств оценка получается хуже, чем оценка (1).

Следствие 1. [2] *Пусть непустое подмножество $A \subset H$ выпукло и замкнуто. Тогда условия*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00139а) и ФЦП «Кадры» программа 1.2.1.

1) $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x)$,

2) $\forall\ \varrho > 0$, $\forall\ x_0,\ x_1 \in H \backslash U_\varrho(A)$, $\{a_i\} = P_A(x_i)$, $i \in \{0, 1\}$,

$$\|a_0 - a_1\| \leq \frac{R}{(R + \varrho)} \cdot \|x_0 - x_1\|,$$

эквивалентны.

Теорема 2. *Пусть* $A \subset H$, $S \subset \partial A$. *Определим множество* $\Phi \doteq \left(\bigcup\limits_{x \in S} N(A; x)\right) \bigcap (H \backslash U_\varrho(A))$. *Пусть функция*

$$\delta_S(\varepsilon) \doteq \inf \left\{ \delta > 0 : B_\delta\left(\frac{a_0 + a_1}{2}\right) \subset A,\ \forall\ a_0, a_1 \in S :\ \|a_0 - a_1\| = \varepsilon \right\}$$

удовлетворяет условию $\delta_S(\varepsilon) \geq C\varepsilon^p$, *где* $C > 0$, $p \geq 2$.

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x_0, x_1 \in \Phi : \|x_0 - x_1\| < \delta$, $[x_0, x_1] \subset \Phi$, $\{a_i\} = P_A(x_i)$, $i \in \{0, 1\}$, $\|x_0 - a_0\| = \|x_1 - a_1\| \geq \varrho$, *выполнена оценка*

$$\|x_0 - x_1\|^2 \geq \|a_0 - a_1\|^2 + \left(\frac{8C\varrho}{1 - 2^{1-p}} - \varepsilon\right) \|a_0 - a_1\|^p +$$

$$+ \left(\frac{16C^2\varrho^2}{(1 - 2^{1-p})^2} - \varepsilon\right) \|a_0 - a_1\|^{2p-2}.$$

Полученные результаты применены для оценок скорости сходимости метода проекции градиента с сильно выпуклым множеством и выпуклой дифференцируемой функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007. 440 с.

2. *Балашов М. В., Голубев М. О.* Об условии Липшица для метрической проекции в гильбертовом пространстве // Тр. 54-ой научн. конф. МФТИ. М.: МФТИ, 2011. Т. 1. С. 34.

3. *Abatzoglou T. J.* The minimum norm projection on C^2-manifolds in $\mathbb{R}^n$ // Trans. of AMS. 1978. Vol. 243. P. 115–122.

4. *Abatzoglou T. J.* The Lipschitz continuity of the metric projection // J. Approx. Theory. 1979. Vol. 26. P. 212–218.