А. В. Головцов, В. С. Мокейчев (Казань)
Valery.Mokeychev@ksu.ru

ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННОЙ ВОЛНЫ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ ЕЁ АМПЛИТУД

Если в волновом уравнении переменные t, (x, y, z) разделяются, то собственная волна $\phi(t)\psi(x, y, z)$ определяется равенствами $\phi^{(2)}(t) + a_1\phi^{(1)}(t) + (a_2 - \lambda)\phi(t) = 0$. $W\psi(x, y, z) = \lambda\psi(x, y, z)$, где W — волновой оператор, порождённый линейным, дифференциальным оператором в частных производных и не известными, дополнительными условиями на $\psi(x, y, z)$, определяемыми условиями среды, где движется волна. Коэффициенты в волновом уравнении, как правило, не известны. При этом λ — собственное значение оператора W всегда не известно.

Требуется определить $U = \phi(t)\psi(x_0, y_0, z_0)$, если известны её амплитуды A_0, A_1, A_2, A_3 в моменты 0, T, $2T$, $3T$. В случае не зависимости a_1, a_2 от t доказаны

Теорема 1. *Пусть $\tau_1 \neq \tau_2$ — положительные корни уравнения $(A_1^2 - A_0A_2)\tau^2 + (A_0A_3 - A_1A_2)\tau + (A_2^2 - A_1A_3) = 0$. Тогда $U = \tau_1^{t/T}(A_1 - A_0\tau_2)/(\tau_1 - \tau_2) + \tau_2^{t/T}(A_1 - A_0\tau_1)/(\tau_2 - \tau_1)$, причём $a_1 = -T^{-1}\ln(\tau_1\tau_2)$, $a_2 - \lambda = T^{-2}\ln(\tau_1)\ln(\tau_2)$.*

Теорема 2. *При не выполнении предположений теоремы 1, но существовании $\tau > 0$, для которого $A_0\tau^2 - 2A_1\tau + A_2 = 0$, $2A_0T\tau^3 + A_1\tau^2 = A_3$ выполняются равенства $U = \tau^{t/T}(A_0t - A_0T + A_1/\tau)$, $a_1 = -2T^{-1}\ln(\tau)$, $a_2 - \lambda = (T^{-1}\ln(\tau))^2$.*

Теорема 3. *При не выполнении предположений теорем 1, 2, но существовании $\tau > 0$, для которого $\tau^2(A_1^2 - A_2A_0) = A_2^2 - A_1A_3$, $|A_3 + A_1\tau^2| \leq |2A_2\tau|$, в случае $A_2 \neq 0$ выполняются равенства $U = \tau^{t/T}(A_0\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$, где $\beta = 2\pi m/T + \varepsilon\arccos((A_3 + A_1\tau^2)/(2A_2\tau T))$, ε — число 1 либо -1, m — целое число, причём $B = \big(A_1/\tau - A_0(A_3 + A_1\tau^2)/(2A_2\tau)\big)/\sin(\beta T)$, если $\sin(\beta T) \neq 0$, $\tau = 1$, $B = (A_4 - A_0\cos(\pi k t_4/T))/\sin(\pi k t_4/T)$, если k — целое и $\beta = \pi k/T \neq 0$; при этом $a_1 = -2T^{-1}\ln(\tau)$, $a_2 - \lambda = (\beta^2 + a^2)$.*

Полностью изучен случай $A_2 = 0$.