Ф. В. Голованева, С. А. Шабров (Воронеж)
shaspoteha@mail.ru

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ СПЕКТРА ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Бурное развитие качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами можно объяснить следующим обстоятельством: дифференциальное уравнение

$$-(pu')' + Q'u = F' \tag{1}$$

стало трактоваться как поточечно заданное, т.е. как обыкновенное.

Поточечная трактовка позволила применить к таким дифференциальным уравнениям качественные методы анализа решения (типа теорем Ролля), что сделало возможным получение столь важной для приложений информации (например, количество нулей, экстремумов и пр.). Следует отметить, что изучение (1) с позиций теории обобщенных функций позволяет установить лишь слабую разрешимость (оставляя за кадром многие вопросы: о перемежаемости нулей и пр.). Последнее вызвано тем, что (1) расценивается как равенство функционалов, определенных на D — пространстве бесконечно дифференцируемых финитных на $[0;\, l]$ функций.

С точки зрения поточечной интерпретации уравнения, позволившей для уравнения второго порядка построить точную параллель классической теории вплоть до осцилляционных теорем (см. [1–3]), для краевой задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = \lambda u M'_\sigma, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(l) = u'(l) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

здесь λ — спектральный параметр, удается получить достаточные условия осцилляционности спектра, а именно, справедлива установить справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $Q(x)$ не убывает на $[0; l]$, и разность $Q(l) - Q(0)$ достаточно мала. Тогда спектр задачи (2) состоит из действительных положительных собственных значений, единственная точка сгущения которых $+\infty$, (геометрическая) кратность каждого из них равна 1. Если собственные значения занумеровать в порядке возрастания $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, и через $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ обозначить соответствующие им собственные функции, то справедливы следующие утверждения:*

(а) нули $\varphi_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$ перемежаются;

(б) нетривиальная комбинация $\sum\limits_{i=k}^{m} \alpha_i \varphi_i(x)$ имеет не более m нулей и не менее k перемен знака.

Решение краевой задачи (2) мы ищем в классе непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, первая производная $u'(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0; l]$; вторая производная $u''_{xx}(x)$ имеет конечное на $[0; l]$ изменение; $(pu''_{xx})(x)$ - абсолютно непрерывна на $[0; l]$, $(pu''_{xx})'_x(x) - \sigma$ — абсолютно непрерывна на $[0; l]$.

В уравнении из (2) все производные до третьего порядка включительно понимаются в обычном смысле, а производная четвертого порядка — по Радону – Никодиму [1].

На коэффициенты $p(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ мы накладываем вполне физичные условия:

1. $p(x)$ имеет конечные на $[0; l]$ изменения;
2. $\inf\limits_{x \in [0; l]} p(x) > 0$;
3. $Q(x)$ - не убывает на $[0; l]$;
4. $M(x)$ - возрастает на $[0; l]$;
5. $Q(x)$ и $M(x)$ – σ-абсолютно непрерывны на $[0; l]$.

Переменная x в уравнении принадлежит специальному множеству $\overline{[0; l]}_\sigma$, в котором каждая точка ξ, принадлежащая множеству $S(\sigma)$ точек разрыва функции $\sigma(x)$, заменена на упорядоченную тройку собственных элементов $\{\xi - 0, \xi, \xi + 0\}$. В таких точках ξ уравнение понимается как равенство

$$\Delta\left(pu''_{xx}\right)'_x(\xi) + u(\xi)\,\Delta Q(\xi) = \lambda u(\xi)\,\Delta M(\xi),$$

где $\Delta\psi(\xi)$ — скачок функции $\psi(\xi)$ в точке ξ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покорный Ю. В.* Интеграл Стилтьеса и производная по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 2. С. 167–169.

2. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, вып. 1 (379). С. 111–154.

3. *Покорный Ю. В. и др.* Осцилляционный метод в спектральных задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 192 с.