Для решения задачи (1) предлагается использовать решение в виде

$$T^{(i)}(x) = \left(J_1 - D_1 w^{(i)}\ \Big|_{x_1}\right) \frac{\mathtt{ch}\, m_i X_i(x, x_2)}{\mathtt{sh}\, m_i X_i(x_1, x_2)} +$$

$$+ \left(J_2 - D_1 w^{(i)}\ \Big|_{x_2}\right) \frac{\mathtt{ch}\, m_i X_i(x, x_1)}{\mathtt{sh}\, m_i X_i(x_2, x_1)} + D_1 w(x), \qquad (4)$$

Используя представления (3) и (4) получено полное решения поставленной задачи. С этой целью введено понятие матрицы потенциалов при отличном от нуля определителя и правой части. Особо рассмотрен вопрос важный для приложений, о системе, когда поток равен нулю на всех открытых вершинах. Приведены многочисленные частные примеры. Показано приложения полученных методов к решению задачи о теплопередачи тепла через трубу при продольном сложном оребрении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладышев Ю. А.* Формализм Бельтрами – Берса и его приложения в математической физике. Калуга, 1997 г.

Ю. А. Гладышев, Ю. В. Афанасенкова (Калуга)
dvoryanchikova_y@mail.ru

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТРИЦЫ ПОТОКОВ И МАТРИЦЫ ПОТЕНЦИАЛОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

Приведенные в сообщении построения предназначены для изучения процессов переноса в системе стержней, представленной определенным геометрическим графом.

Предварительно построены матрицы потоков P и матрицы потенциалов R для одного стержня. Положим, что x_1, x_2 координаты концов стержня. Было показано [1], что решение задачи Дирихле (D), где $\Phi|_{x_1} = \Phi_1$, $\Phi|_{x_2} = \Phi_2$ для потенциалов Φ при использовании аппарата обобщенных степеней Берса можно представить в виде

$$\Phi(x) = (\Phi_1 - w|_{x_1}) \frac{\operatorname{sh} mX(x, x_2)}{\operatorname{sh} mX(x_1, x_2)} + (\Phi_2 - w|_{x_2}) \frac{\operatorname{sh} mX(x, x_2)}{\operatorname{sh} mX(x_2, x_1)} + w(x).$$

Здесь w любые решения неоднородного уравнения процесса переноса в стержне при наличии внешнего обмена

$$a_2(x) \frac{d}{dx} \left(a_1(x) \frac{d\Phi}{dx}\right) - m^2 \Phi = \Phi_0(x).$$

Переменные коэффициенты $a_1(x)$, $a_2(x)$ определены материальными и геометрическими параметрами стержня, а $\Phi_0(x)$ — заданная функция.

Напомним, что в процессе теплопроводности потенциал — температура, при диффузии вещества или зарядов это концентрация, при течении тока — потенциал электрического поля и т. д.

Матрица потоков выражает связь потенциалов на концах стержня Φ_1, Φ_1 и потоков J_1, J_2.

$$J_i = \sum_{k=1}^{2} P_{ik}\Phi_k + Q_i. \tag{1}$$

Здесь Q_i дополнительные потоки. Как легко установить [1], используя закон переноса, $J = -D_1\Phi$, где элементы матрицы потоков определены как

$$P_{11} = -\frac{m \operatorname{ch} m\widetilde{X}(x_1, x_2)}{\operatorname{sh} mX(x_1, x_2)}, \quad P_{12} = -\frac{m}{\operatorname{sh} mX(x_2, x_1)},$$

$$P_{21} = -\frac{m}{\operatorname{sh} mX(x_1, x_2)}, \quad P_{22} = -\frac{m \operatorname{ch} m\widetilde{X}(x_2, x_1)}{\operatorname{sh} mX(x_2, x_1)}.$$

Для дополнительных потоков найдем

$$Q_1 = P_{11}w|_{x_1} - P_{12}w|_{x_2} - D_1w|_{x_1},$$

$$Q_2 = -P_{21}w|_{x_1} - P_{22}w|_{x_2} - D_1w|_{x_2}.$$

Введем в рассмотрение вектор-столбцы Φ, J, W, D_1W с компонентами

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}, \quad D_1W = \begin{pmatrix} D_1w|_{x_1} \\ D_1w|_{x_2} \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношениями (1) запишем

$$J = P\Phi - PW - D_1W. \tag{2}$$

Поставим вторую краевую задачу для стержня

$$J_1 = -D_1\Phi|_{x_1}, \quad J_2 = -D_1\Phi|_{x_2},$$

где J_1, J_2 — заданные потоки. Используя аппарат обобщенных степеней решение запишем

$$\Phi(x) = -(J_1 + D_1w|_{x_1})\frac{\operatorname{ch} mX(x, x_2)}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_1, x_2)} -$$

$$-(J_2 + D_1 w|_{x_2}) \frac{\operatorname{ch} mX(x, x_1)}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_2, x_1)} + w(x). \tag{3}$$

Линейная связь между потоками и потенциалами осуществляет матрица потенциалов R, которая имеет вид

$$R_{11} = -\frac{\operatorname{ch} mX(x_1, x_2)}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_1, x_2)}, \quad R_{12} = -\frac{1}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_2, x_1)},$$

$$R_{21} = -\frac{1}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_1, x_2)}, \quad R_{22} = -\frac{\operatorname{ch} mX(x_2, x_1)}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_2, x_1)}.$$

После этого соотношение между потоками и потенциалами в (3) запишем

$$\Phi = RJ + R(D_1 W) + W, \tag{4}$$

где использованы обозначения введенные ранее. Обратим внимание, что решение w совпадает с решением в (2).

Легко убедиться, непосредственно используя тождества для функций $\operatorname{ch} mX$, $\operatorname{sh} mX$, установленные в [2], что матрицы P, R взаимно обратные $PR = RP = 1$. Поэтому из (4), применяя матричный операторы P, найдем J d(2) и обратно.

Важным частным примером являются стержни, в которых все вершины закрыты, т. е. все $J_1 = J_2 = 0$. Тогда решение задачи имеет вид

$$\Phi = P(D_1 W) + W.$$

Потенциалы концов стержня определены только внешними условиями, которые задает функция Φ. Имеем процессы переноса в стержне за счет внешней разности потенциалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладышев Ю. А., Муталапова Т. В.* Методы решения задач теплопередачи в системах стержней и оболочек // Вестн. Калуж. ун-та. 2010. № 4. С. 14–18.

2. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложения. Калуга, 2011. 201 с.