А. П. Буланов (Обнинск)

О РЕКУРРЕНТНОЙ ФОРМУЛЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ ЛАМБЕРТА

Функцией Ламберта $y = l(x)$ называется обратная функция по отношению к функции $x = y \cdot e^y$. О гиперфункциях Ламберта, имеющих существенные приложения см. [1–3]. Используя обозначения цепных экспонент запишем функции $l(x)$ и $y \cdot e^y$ в виде

$$y = l(x) = x \cdot e^{-1 \cdot x \cdot e^{-1 \cdot x \cdot e^{\cdots}}} = x \cdot \langle e^x;\ -1,\ -1,\ \ldots\rangle;$$

$$x = y \cdot e^{1 \cdot y \cdot e^{0 \cdot y \cdot e^{0 \cdot y \cdot e^{\cdots}}}} = y \cdot \langle e^y;\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots\rangle$$

На Десятой международной Казанской летней научной школе-конференции (Казань, 1–7 июля 2011 г.) автор, подражая И. Галидакису, предложил называть функции вида

$$y = x \cdot e^{a_1 \cdot x \cdot e^{a_2 \cdot x \cdot e^{\cdots}}} = x \cdot \langle e^x;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\rangle, \tag{1}$$

где $a_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ или $k = 1, 2, \ldots, m$, *функциями Ламберта.* При этом цепная экспонента $\langle e^x;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\rangle$ может быть бесконечной, как, например, $\langle e^x;\ -1,\ -1,\ \ldots\rangle$ в определении первоначальной функции Ламберта, или конечной $\langle e^x;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m\rangle$, как, например, $e^y = \langle e^y;\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots\rangle = \langle e^y; 1\rangle$.

В работе [4] рассматриваются две цепные экспоненты

$$B(z) = \langle e^z;\ b_1,\ b_2,\ \ldots\rangle; \quad A(w) = \langle e^w;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\rangle, \tag{2}$$

где в последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ показатели $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $b_1 \neq b_2$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |b_n| = \bar{b} < \infty$, а показатели $a_1,\ a_2, \ldots$ определяются рекуррентной формулой посредством $b_1,\ b_2, \ldots$ (в работе [4, с. 69] см. формулу (16)). Эти две цепные экспоненты образуют две функции Ламберта

$$L_b(z) = z \cdot B(z) \qquad L_a(w) = w \cdot A(w), \tag{3}$$

которые могут быть взаимно обратными функциями по отношению друг к другу. Первоначальная функция Ламберта

$$w = z \cdot \langle e^z;\ -1,\ -1,\ \ldots\rangle$$

есть частный случай, когда в формулах (2) и (3) $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = -1$. Здесь, мы видим, $b_1 = b_2$. Включая неравенство $b_1 \neq b_2$, мы приходим к обобщению понятия первоначальной функции Ламберта.

В общем случае легко определяются первые три показателя

$$a_1 = -b_1, \quad a_2 = b_2 - b_1, \quad a_3 = \frac{1}{b_2 - b_1} \cdot (b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2 b_3). \tag{4}$$

Показатели $a_4, a_5, \ldots, a_n$ определяются по упомянутой рекуррентной формуле

$$a_n = \frac{-1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \cdot \Bigg\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{k_1^{k_2} k_2^{k_3} \cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1! k_2! \cdots k_{n-1}!} \times$$

$$\times \left[(-(n+1))^{k_1-1} b_1^{k_1} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} + a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}} \right] + b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n \Bigg\}. \tag{5}$$

В этом сообщении предлагается в развернутом виде представить формулы для определения показателя a_4 посредством b_1, b_2, b_3, b_4 и показателя a_5 посредством b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и a_1, a_2, a_3, a_4.

Прежде заметим, что цепная экспонента $B(z)$ в окрестности точки $z = 0$ является аналитической функцией и ее степенной ряд (см. [5] и [6])

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n$$

сходится в круге $K = \left\{ z : \ |z| < \frac{1}{be} \right\}$. В этом же круге сходится и степенной ряд $w = z \cdot B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)} B^{(n)}(0) \cdot z^{n+1}$. В работе [5] есть вывод о том, что

$$B^{(n)}(0) = H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} \times$$

$$\times b_1^{k_1} (k_1 b_2)^{k_2} (k_2 b_3)^{k_3} \cdots (k_{n-1} b_n)^{k_n}. \tag{6}$$

Для определения показателя a_4 распишем форму $H^{(4)}(b_1, b_2, b_3, b_4)$ с соответствующими числовыми коэффициентами. Имеем из (6) восемь ненулевых комбинаций, которые дают эти коэффициенты при условии $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 4$:

$$\frac{4! k_1^{k_2} k_2^{k_3} k_3^{k_4}}{k_1! k_2! k_3! k_4!} = \{1, 12, 24, 4, 24, 24, 12, 4!\}$$

Получаем форму 4-й степени

$$H^{(4)}(b_1, b_2, b_3, b_4) = b_1^4 + 12 b_1^3 b_2 + 24 b_1^2 b_2^2 + 4 b_1 b_2^3 +$$

$$+24b_1^2b_2b_3+24b_1b_2^2b_3+12b_1b_2b_3^2+4!b_1b_2b_3b_4.$$

Теперь, полагая в формуле (5) $n=4$, имеем

$$a_4=\frac{-1}{4!a_1a_2a_3}\Bigg\{\sum_{k_1+k_2+k_3=4}\frac{4!k_1^{k_2}k_2^{k_3}}{k_1!k_2!k_3!}[(-5)^{k_1-1}b_1^{k_1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}+a_1^{k_1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}]+$$

$$+4!b_1b_2b_3b_4\Bigg\}=\frac{-1}{b_1^2-2b_1b_2+b_2b_3}\cdot\Bigg\{(b_1^3-3b_1^2b_2+b_1b_2^2+b_1b_2b_3-b_2b_3b_4)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{b_2^2-b_3^2}{b_2-b_1}\cdot b_1\cdot b_2+\frac{b_3-b_1}{b_2-b_1}\cdot b_1b_2b_3\Bigg\}. \qquad (7)$$

Для определения показателя a_5 из формы (6), полагая там $n=5$, имеем 16 ненулевых комбинаций, которые дают числовые коэффициенты формы $H^{(5)}(b_1,\ldots,b_5)$ при условии $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=5$:

$$\frac{5!k_1^{k_2}k_2^{k_3}k_3^{k_4}k_4^{k_5}}{k_1!k_2!k_3!k_4!k_5!}=\{1,20,90,80,5,60,240,60,60,120,20,120,120,120,60,5!\}.$$

Заметим, что последняя ненулевая комбинация получается тогда, когда $k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=1$, и она дает числовой коэффициент 5!. Распишем теперь сумму формулы (5), полагая там $n=5$, отделяя последнее слагаемое с числовым коэффициентом 5!:

$$a_5=\frac{-1}{5!a_1a_2a_3a_4}\Bigg\{\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=5}\frac{5!k_1^{k_2}k_2^{k_3}k_3^{k_4}}{k_1!k_2!k_3!k_4!}\times$$

$$\times[(-6)^{k_1-1}b_1^{k_1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}b_4^{k_4}+a_1^{k_1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}a_4^{k_4}]+5!b_1b_2b_3b_4b_5\Bigg\}=$$

$$=\frac{-1}{5!a_1a_2a_3a_4}\cdot\Bigg\{1\cdot[(-6)^4b_1^5+a_1^5]+20\cdot[(-6)^3b_1^4b_2+a_1^4a_2]+$$

$$+90\cdot[(-6)^2b_1^3b_2^2+a_1^3a_2^2]+80\cdot[(-6)b_1^2b_2^3+a_1^2a_2^3]+5\cdot[b_1b_2^4+a_1a_2^4]+$$

$$+60\cdot[(-6)^2b_1^3b_2b_3+a_1^3a_2a_3]+240\cdot[(-6)b_1^2b_2^2b_3+a_1^2a_2^2a_3]+$$

$$+60\cdot[(-6)b_1^2b_2b_3^2+a_1^2a_2a_3^2]+60[b_1b_2^3b_3+a_1a_2^3a_3]+$$

$$+120[b_1b_2^2b_3^2+a_1a_2^2a_3^2]+20[b_1b_2b_3^3+a_1a_2a_3^3]+$$

$$+120[(-6)b_1^2b_2b_3b_4+a_1^2a_2a_3a_4]+120[b_1b_2^2b_3b_4+a_1a_2^2a_3a_4]+$$

$$+120[b_1b_2b_3^2b_4+a_1a_2a_3^2a_4]+60[b_1b_2b_3b_4^2+a_1a_2a_3a_4^2]+5!b_1b_2b_3b_4b_5\Bigg\}. \qquad (8)$$

Здесь без доказательства приведем две (простые, но не тривиальные) последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: $b_1 \neq b_2 = b_3 = b_4 = \ldots = b$; $a_1 = -b_1$, $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n = \ldots = b - b_1$. В единичном квадрате без диагонали $\{1 \leq b \leq 2; 1 \leq b_1 \leq 2\} \setminus \{b = b_1\}$ количество различных точек — континуум. Поэтому количество конкретных пар взаимно обратных числовых последовательностей, соответствующих точкам квадрата также континуум. В другом случае (вне квадрата), если $b_1 = 1, b = 0$, имеем тривиальную точку. Тогда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = -1$, как показатели первоначальной функции Ламберта.

Если взять простейшую циклическую последовательность показателей $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $b_{2k-1} = \beta$, $b_{2k} = 1$, $k = 1, 2, \ldots$ (как в работе [1]), то в обратной последовательности имеем

$$a_1 = -\beta, \quad a_2 = 1 - \beta, \quad a_3 = -\beta, \quad a_4 = \frac{1}{2} - \beta, \quad a_5 = \frac{24\beta^2 - 20\beta + 1}{12(1 - 2\beta)}.$$

Далее показатели $a_6, a_7, \ldots$ будут выражаться посредством рациональных функций одного переменного β. При определении a_4 ожидалось, что a_4 будет таким же, как $a_2 = 1 - \beta$, но формула (7) дает $a_4 = \frac{1}{2} - \beta$, и этот показатель отверг предположение о том, что обратная последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ циклическая, как и последовательность исходная $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Отметим первые пять показателей обратной последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ при двух конкретных значениях $\beta = -1$ и $\beta = 2$. Если $\beta = -1$ имеем $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3/2$, $a_5 = 5/4$. Если $\beta = 2$ имеем $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $a_3 = -2$, $a_4 = -3/2$, $a_5 = -19/12$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубинов А. Е., Галидакис И. Н.* Явное решение уравнения Кеплера // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 3(139). С. 365–370

2. *Galidakis I. N.* On an application of Lambert's W function to infinite exponentials // Complex Var. Theory Appl. 2004. Vol. 49, № 11. P. 759–780.

3. *Galidacis I. N.* On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z) = z$ // Complex Variables. 2005. Vol. 50, № 13. P. 977–997.

4. *Буланов А. П.* Цепные экспоненты и функции Ламберта // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т.43. С. 64–71.

5. *Буланов А. П.* Регулярность степеней бесконечной кратности // Изв. АНРФ. Сер. матем. 1998. Т. 62, № 5. С. 49–78.

6. *Буланов А. П.* Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения // Мат. сб. 2001.Т.192.- №11. С. 3–34.