М. В. Балашов (Москва)
balashov73@mail.ru

БЛИЖАЙШИЕ И НАИБОЛЕЕ УДАЛЕННЫЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВ[1]

При решении многих задач аппроксимации и условной оптимизации используется оператор метрической проекции точки на множество, который заданной точке ставит в соответствие ближайшую к ней точку заданного множества [1, 2]. Если заданное множество замкнуто, но не выпукло, то метрическая проекция точки может быть не единственной, а в бесконечномерном случае и не существовать. Аналогичные вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от параметров возникают и про наиболее удаленные точки (выпуклого) замкнутого множества от данной точки пространства [3]. Основные вопросы про ближайшие и наиболее удаленные точки (выпуклых) множеств — существование и непрерывная зависимость от параметров задачи, оценка модуля непрерывности. Основной результат про ближайщие [4] и наиболее удаленные [5] точки в равномерно выпуклых пространствах — существование для всякого ограниченного замкнутого множества всюду плотного подмножества G_δ-типа, на котором существует непрерывно зависящая от точек указанного G_δ-множества единственная ближайшая/наиболее удаленная точка данного замкнутого ограниченного множества.

В докладе будут обсуждаться свойства множества, гарантирующие существование и единственность ближайшей/наиболее удаленной точки для всех точек из некоторой окрестности/вне некоторой окрестности указанного множества. Работы [6–13] посвящены указанной проблематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов Л. П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. Т. 28, № 6(174) (1973. С. 3-66.

2. *Балаганский В. С., Власов Л. П.* Проблема выпуклости чебышёвских множеств // УМН. 1996. Т. 51, № 6. С. 125–188.

3. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. Приложение II.

4. *Стечкин С. Б.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Rev. Roum. Math. Pur. et Appl. 1963. № 8(1). P. 5–18.

5. *Edelstein M.* Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces // Israel J. Math. 1966. № 4(3). P. 171–176.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00139-а, программой «Развитие научного потенциала высшей школы» 2.1.1/11133 и ФЦП «Кадры» программа 1.2.1.

6. *Vial J.-P.* Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Oper. Res. 1983. Vol. 8, № 2. P. 231–259.

7. *Borwein J. M., Strojwas H. M.* Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space, I. Theory // Canad. J. Math. 1986. Vol. 38. P. 431–452.

8. *Bernard F., Thibault L., Zlateva N.* Characterization of proximal regular sets in super reflexive Banach spaces // J. Convex Anal. 2006. Vol. 13, № 3–4. P. 525–559.

9. *Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R.* Proximal smoothness and lower–C^2 property // J. Convex Anal. 1995. Vol. 2, № 1–2. P. 117-144.

10. *Балашов М. В., Иванов Г. Е.* Об удаленных точках множеств // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 2. С. 163–170.

11.*Balashov M. V., Ivanov G. E.* Weakly convex and proximally smooth sets in Banach spaces // Izvestiya: Mathematics. 2009. Vol. 73, № 3. P. 455–499.

12. *Иванов Г. Е.* Наиболее удаленные точки и сильная выпуклость множеств // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 3. С. 382–395.

13. *Balashov M. V., Repovš D.* Weakly convex sets and modulus of nonconvexity // J. Math. Anal. Appl. 2010. Vol. 371. P. 113–127.

А. Н. Бахвалов (Москва)
an-bakh@yandex.ru

О ЛОКАЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ ЧЕЗАРО ДЛЯ КРЕСТООБРАЗНЫХ ОКРЕСТНОСТЕЙ[1]

Д. Ватерманом [1] было доказано, что если $\alpha \in (-1, 0)$, функция непрерывна по $\{n^{\alpha+1}\}$-вариации на $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, то ее ряд Фурье суммируется методом (C, α) в каждой точке.

В работах автора [2, 3] (где можно найти соответствующие определения) этот результат перенесен на многомерный случай, и показано, что условие непрерывности по вариации существенно, в отличие от одномерного случая, даже для локализации средних. В частности, имеет место (см. [3, теорема 3])

Теорема. *Пусть $\alpha_j \in (-1, 0)$ и $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, 2$, причем эти числа таковы, что $\beta_1 + \beta_2 \le 1$. Тогда существует непрерывная функция из класса $(\{n^{\beta_1}\}, \{n^{\beta_2}\})BV(\mathbb{T}^2)$, равная тождественно нулю вне $(\frac{\pi}{2}, \pi)^2$, ряд Фурье которой $(C, \boldsymbol{\alpha})$-не суммируется к нулю в нуле, даже если рассматривать только кубические средние.*

Оказывается, что условие непрерывности по вариации можно заменить более слабым, если локализацию понимать в смысле крестообразных окрестностей. Пусть $\{n^\beta\}_N = \{n^\beta\}_{n=N+1}^{\infty}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00169) и программы «Ведущие научные школы» (проект НШ-979.2012.1).