Если же при этом для любого x можно подобрать при каждом n последовательность $x'_{n+1}, x'_{n+2}, \ldots, x'_{n+k}, \ldots$ такую, что соответствующие значения $y'_{n+1} \neq y_{n+1}$, $y'_{n+k} = y_{n+k}$, то тогда $f(x)$ нигде не дифференцируема. Действительно,

$$0 < |x' - x| \leqslant \frac{q-1}{q^{n+1}} + \frac{q-1}{q^{n+2}} + \ldots = \frac{q-1}{q^{n+1}(1-1/q)} = \frac{1}{q^n},$$

а $|f(x') - f(x)| \geqslant \frac{1}{p^{n+1}}$, поэтому

$$\left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}\right| \geqslant \frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n \longrightarrow +\infty,$$

так как $q > p$.

А. М. Сарсенби (Шымкент, Казахстан)
Abzhahan@mail.ru

КРИТЕРИЙ БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

В работе [1] автора настоящей заметки было установлено, что равномерная ограниченность почти всюду модулей корневых векторов прямого и сопряженного дифференциальных операторов второго порядка является необходимым и достаточным условием их базисности Рисса в классе L_2. В случае произвольных систем из класса L_2, не связанных с конкретным дифференциальным оператором, подобных фактов не наблюдается. Например, системы вида [2]

$$\{|x|^\alpha e^{inx}\}, \quad \{|x|^{-\alpha} e^{-inx}\}$$

где n — целое число, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, являются биортогонально сопряженными, нормированными. Каждая из них образует базис пространства $L_2(-\pi, \pi)$, но не базис Рисса. Полиномы Лежандра (см., например, [3, с. 44])

$$P_n x = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \frac{d^n (1-x^2)^n}{dx^n}$$

образуют базис Рисса пространства $L_2(-1, 1)$ (ортонормированный базис), но они не ограничены. Эти примеры показывают, что нормированные полные и минимальные биортогонально сопряженные системы могут быть базисами Рисса, могут и не быть базисами Рисса. Тем не менее справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть система $\{u_k(x)\}$ из класса $L_2(G)$ полна, минимальна и удовлетворяет условию $\|u_k\|_{L_\infty(G)} \le C_1$. Тогда $\{u_k(x)\}$ базис Рисса в $L_2(G)$ тогда и только тогда, когда биортогонально сопряженная система $\{v_k(x)\}$ полна и удовлетворяет условию $\|v_k\|_{L_\infty(G)} \le C_2$.*

Поскольку всякий базис Рисса есть безусловный почти нормированный базис, то теорема 1 позволяет утверждать следующее.

Теорема 2. *Полная и минимальная система $\{u_k(x)\}$ из класса $L_2(G)$, удовлетворяющая условию $\|u_k\|_{L_\infty(G)} \le C_1\|u_k\|_{L_2(G)}$, будет безусловным базисом в $L_2(G)$ тогда и только тогда, когда биортогонально сопряженная система $\{v_k(x)\}$ полна и выполнены следующие оценки:*

$$\|v_k\|_{L_\infty(G)} \le C_1\|v_k\|_{L_2(G)},$$

$$\|u_k\|_{L_2(G)}\|v_k\|_{L_2(G)} \le C.$$

Некоторые известные условия [4], обеспечивающие базисность Рисса изучаемых систем, содержат объекты, привлекаемые извне.

Одно из наиболее часто используемых условий — условие квадратической близости [4] довольно трудоемко и не всегда применимо.

Систему функций $\{\varphi_k(x)\}$ называют *квадратически близкой* к $\{\psi_k(x)\}$, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_k - \psi_k|_{L_2}^2 < +\infty.$$

Известно [4], что всякая минимальная система, квадратически близкая к базису Рисса, есть базис Рисса. Указанный выше пробел в общей теории базисов пространства L_2 может быть восполнен основными результатами настоящей заметки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сарсенби А. М.* Критерий базисности Рисса систем собственных присоединенных функций дифференциальных операторов высших порядков на отрезке // Докл. АН. 2008. Т. 419, № 5. С. 601–603.

2. *Бабенко К. И.* О сопряженных функциях // Докл. АН СССР. 1948. Т. 62, № 2. С. 157–160.

3. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., 1963. 360 с.

4. *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. записки Моск. гос. ун-та. 1951. Вып. 148. С. 69-–107.