Обозначим через $\varphi_j(x,\lambda)$, $(x,\lambda) \in [0,1]\times\mathbb{C}$, решения уравнения $(f''' + p\,f')' + qf = \lambda f$, удовлетворяющие условиям $\varphi_j^{(k-1)}(0,\lambda) = \delta_{jk}$, где $\varphi_j^{(3)} = \varphi_j''' + p\,\varphi_j'$, $j,k = \overline{1,4}$, δ_{jk} — символ Кронекера. Пусть

$$\Delta_{mn}^{kl}(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_m^{(k)} & \varphi_n^{(k)} \\ \varphi_m^{(l)} & \varphi_n^{(l)} \end{vmatrix}(1,\lambda), \qquad m,n = 1,2,3,4, \quad k,l = 0,1,2,3,$$

$R = \{\lambda \in \mathbb{R} : \varphi_2''(1,\lambda)\Delta_{42}^{32}(\lambda) \neq 0\}$, $D(\lambda,\theta_1,\theta_2)$ — определитель линейной системы уравнений с неизвестными $f(v)$, $v \in W$:

$$\big(\Delta_{42}^{32}(\lambda)\deg_+ v + \Delta_{12}^{02}(\lambda)\deg_- v\big) f(v) = \varphi_2''(1,\lambda)\sum_{u\in S(v)} e^{i(p_{1j}\theta_1 + p_{2j}\theta_2)} f(v_j).$$

Здесь $S(v)$ — множество всех вершин, смежных с v; v_j — вершина фундаментальной области, которая переходит в вершину $u \in S(v)$ при трансляции графа Γ на вектор $p_{1j}\vec{e}_1 + p_{2j}\vec{e}_2$; $\deg_+ v$ и $\deg_- v$ — полустепень захода и полустепень исхода вершины v.

Утверждение 1. *Если $\lambda \notin R$, то λ принадлежит спектру $\sigma(H)$ оператора H тогда и только тогда, когда $D(\lambda,\theta) = 0$ для некоторого $\theta = (\theta_1,\theta_2) \in [-\pi;\pi]^2$.*

Н. Ю. Сабурова, А. В. Томилова (Архангельск)
n.saburova@gmail.com, vdovinaanna1709@rambler.ru

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА НА БЕСКОНЕЧНОЙ ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ[1]

Рассматривается орграф Γ, имеющий вид бесконечной гексагональной решетки. Ориентацию ребер графа выберем таким образом, чтобы каждая вершина являлась либо начальной для всех инцидентных ей ребер, либо конечной. Каждое ребро графа параметризуем параметром $x \in [0,1]$ в соответствии с ориентацией.

Введем оператор H на графе: на каждом ребре оператор действует как $-\partial_x^2 + q$, $q \in L^2(0,1)$, и функции f из области определения $D(H)$ оператора H подчинены условиям Кирхгофа.

В случае четного потенциала q собственные функции оператора Шрёдингера на гексагональном графе изучались в работе [1].

Пусть σ_D – спектр краевой задачи Дирихле $-f'' + qf = \lambda f$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. Определим пространство $\mathcal{H}(\lambda) = \{\psi \in D(H) : H\psi = \lambda\psi\}$ для $\lambda \in \sigma_D$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК 14.740.11.0581).

Пусть $\varphi(x,\lambda)$, $(x,\lambda)\in[0,1]\times\mathbb{C}$, — решение уравнения $-f''+qf=\lambda f$, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0,\lambda)=0$, $\varphi'(0,\lambda)=1$.

Определим функции $\psi^{(\Sigma)}$, носителями которых являются гексагональные ячейки Σ графа Γ, следующим образом: сужения функции $\psi^{(\Sigma)}$ на ребра шестиугольника Σ равны $\pm\varphi(x,\lambda)$, сужения на соседние ребра шестиугольника отличаются знаком. Для двух соседних ячеек Σ_1 и Σ_2 сужения функций $\psi^{(\Sigma_1)}$ и $\psi^{(\Sigma_2)}$ на ребро, общее для Σ_1 и Σ_2, отличаются знаком.

Мы доказываем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Множество собственных значений оператора $\sigma_{pp}(H)=\sigma_D$. Каждое собственное значение $\lambda\in\sigma_{pp}(H)$ имеет бесконечную кратность. Функции $\psi^{(\Sigma)}(x,\lambda)$ для всех Σ принадлежат $\mathcal{H}(\lambda)$. Исключив из этих функций одну (любую), получим базис в пространстве $\mathcal{H}(\lambda)$.*

В работе найдены коэффициенты разложения произвольной функции $f(x)$ из $\mathcal{H}(\lambda)$ по базисным функциям $\psi^{(\Sigma)}(x,\lambda)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuchment P., Post O.* On the spectra of carbon nano-structures // Comm. Math. Phys. 2007. Vol. 275, № 3. P. 805–826.

Т. Н. Сабурова (Москва)
taniasab37@gmail.com

О КРАТНЫХ РЯДАХ ПО СИСТЕМЕ ФАБЕРА – ШАУДЕРА

Система Фабера – Шаудера $\varphi_m(x)$, является первым базисом в $C[0,1]$. Из результатов [1] следует, что произведение $\varphi_{m_1}\varphi_{m_2}\cdots\varphi_{m_n}$ (при нумерации по квадратам) образует базис в $C[0,1]^n$ — пространстве функций n переменных, непрерывных на n-мерном единичном кубе $[0,1]^n$. Такой базис также назовем базисом Фабера – Шаудера (БФШ).

Пусть теперь $T=\{Tm(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$ — (БФШ) на $[0,1]^n$; A — класс функций $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in C[0,1]^n$, у которых сходится ряд $\sum|a_m(f)|$ (здесь $\{a_m(f)\}$ — последовательность коэффициентов Фурье БФШ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$). Возникает вопрос: при каких условиях, наложенных на функцию $F(x)$, можно утверждать, что для любой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in A$ суперпозиция $F(f(x_1,x_2,\ldots,x_n)))\in A$. Этот вопрос рассматривались ранее для функций одной переменной (см. [2]) и для функций нескольких переменных в [3]. В последней работе было показано, что, если $F(x)$ целая функция и $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in A$, то суперпозиция $F(f(x_1,x_2,\ldots,x_n))\in A$. В настоящей работе мы продолжаем исследовать эту проблему.