Пусть

$$V\left(F\right) = \begin{pmatrix} |\langle f_1, f_1\rangle|^2 & \dots & |\langle f_1, f_M\rangle|^2 \\ \vdots & & \vdots \\ |\langle f_M, f_1\rangle|^2 & \dots & |\langle f_M, f_M\rangle|^2 \end{pmatrix}$$

Теорема 2. *Следующие два утверждения эквивалентны*

- $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ *— простой фрейм Парсеваля в* ℓ_2^N.
- *Матрица* $V\left(F\right)$ *— невырожденная.*

Следствие. *Для того, чтобы произвольный фрейм Парсеваля* $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ *был простым, достаточно чтобы выполнялось неравенство*

$$\frac{|\langle f_i, f_j\rangle|}{\|f_i\|\,\|f_j\|} < \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \forall\, i \neq j$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Casazza P. G., Redmond D., Tremain J. C.* Real Equiangular Frames // CISS Meeting Information Sciences and Systems. Princeton, NJ, 2008.

2. *Рябцов И. С.* О представлении фреймов Парсеваля // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. Вып. 2(23). С. 194-–199.

Н. Ю. Сабурова (Архангельск)
n.saburova@gmail.com

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГРАФЕ[1]

Рассматривается периодический плоский граф Γ. Периодическим будем называть граф, для которого можно выделить фундаментальную область W, сдвигами которой на пару неколлинеарных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в $\mathbb{R}^2$ получается весь граф Γ. Каждое ребро графа параметризуем параметром $x \in [0, 1]$.

Введем оператор Лапласа $-\Delta_\Gamma$ на графе: на каждом ребре оператор действует как $-\partial_x^2$, и функции f из области определения оператора $-\Delta_\Gamma$ подчинены условию Кирхгофа.

Известно, что в случае, когда граф Γ представляет собой квадратную или гексагональную решетку, абсолютно непрерывный спектр оператора Лапласа $\sigma_{ac}(-\Delta_\Gamma) = [0, +\infty)$ [1,2]. В случае треугольной решетки в спектре оператора $-\Delta_\Gamma$ появляется бесконечное число лакун [3]. А как ведет

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК 14.740.11.0581).

себя спектр оператора на произвольном периодическом графе? В работе исследуется зависимость между структурой периодического графа и наличием (или отсутствием) лакун в спектре оператора Лапласа.

Приведем одно из доказанных утверждений.

Утверждение 1. *Пусть* $(p_{1j}, p_{2j}) \in \mathbb{Z}^2$, $j = 1, \ldots, N_0$, *и граф* Γ *представляет собой квадратную решетку с множеством вершин* $\mathbb{Z}^2$, *в которую добавлены ребра, соединяющие вершину* (z_1, z_2) *с вершинами* $(z_1 + p_{1j}, z_2 + p_{2j})$, *для всех* $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$. *Тогда*

$$\sigma_{ac}(-\Delta_\Gamma) = [0, +\infty) \Leftrightarrow p_{1j} + p_{2j} \text{ нечетно для всех } j = 1, \ldots, N_0.$$

Автор выражает благодарность Е. Л. Коротяеву и А. В. Баданину за внимание к работе и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pankrashkin K.* Spectra of Schrödinger operators on equilateral quantum graphs // Lett. Math. Phys. 2006. Vol. 77, № 2. P. 139–154.

2. *Kuchment P., Post O.* On the spectra of carbon nano-structures // Comm. Math. Phys. 2007. Vol. 275, № 3. P. 805–826.

3. *Ando K.* Inverse scattering theory for discrete Schrödinger operators on the hexagonal lattice // arXiv:1110.3922, 2011.

Н. Ю. Сабурова (Архангельск)
n.saburova@gmail.com

О СПЕКТРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГРАФЕ[1]

Рассматривается периодический плоский орграф Γ с фундаментальной областью W. Граф Γ будем называть периодическим, если он инвариантен относительно трансляций с периодами $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$, т.е. $\Gamma + p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 = \Gamma$ при любых $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$. Каждое ребро графа параметризуем параметром $x \in [0, 1]$ в соответствии с ориентацией.

Введем оператор H на графе: на каждом ребре оператор действует как $\partial_x(\partial_x^3 + p\partial_x) + q$, $p, q \in L^2(0, 1)$, и функции f из области определения оператора H удовлетворяют условиям: f непрерывна на графе Γ, $f_e''(v) = 0$, $\sum\limits_{e: v=\tau(e)} \big(f_e''' + p\, f_e'\big)(v) - \sum\limits_{e: v=i(e)} \big(f_e''' + p\, f_e'\big)(v) = 0$ для всех вершин v графа; $i(e)$ и $\tau(e)$ — соответственно начальная и конечная вершина ребра e; f_e — сужение функции f на ребро e графа.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК 14.740.11.0581).