также $\dim_{vc}$ для множеств нейронных сетей и сплайнов с нефиксированными узлами (определения в [3, 5]).

С. В. Конягин задал вопрос о связи между топологией класса и псевдоразмерностью, который привёл автора к рассмотрению следующей величины (и к определению $\dim_{vc}$): $D(Q) := \min\{\dim_{vc}(F) : F \subset C[0;1], F \approx Q\}$, где Q — метрический компакт и «$\approx$» означает гомеоморфность множеств. Автором установлено, что: если Q вложимо в n-мерный компактный полиэдр, то $D(Q) \leq n$. В последние годы активно исследуются свойства различных размерностей типа Ассуа – Нагата (см., например [6, 7]). Оказывается, что $D(Q) \leq \dim_{AN} Q$ ($\dim_{AN}$ — микроскопическая размерность Ассуа – Нагата).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Assouad P.* // Ann. Inst. Fourier. 1983. Vol. 33, № 3.

2. *Рютин К. С.* // Мат. заметки. 2001. Т. 70, вып. 1.

3. *Andrianov A.* // East J. on Approx. 1999. Vol. 5, № 4.

4. *Karpinski M., Werther T.* // SIAM J. Comp. 1993. Vol. 22, № 6.

5. *Schmitt M.* // Lect. Notes in Artificial Intelligence. Berlin: Springer-Verlag, 2002. Vol. 2533.

6. *Bell G., Dranishnikov A.* // Topology Proc. 2011. Vol. 38. P. 209–236.

7. *Brodskiy N., Dydak J., Higes J., Mitra A.* // Israel J. Math. 2009. Vol. 171. P. 405–423.

И. С. Рябцов (Самара)
tinnulion@gmail.com

КРИТЕРИЙ ПРОСТОТЫ ФРЕЙМА ПАРСЕВАЛЯ

В работе [1] вводятся понятия простого и составного фрейма Парсеваля.

Фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ будем называть *составным*, если существует набор неотрицательных констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что система векторов $F_\alpha = \{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ также является фреймом Парсеваля, при этом хотя бы одна константа α_i равна нулю. В противном случае, будем называть фрейм Парсеваля *простым.*

Теорема 1. *Если $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ — простой фрейм Парсеваля в ℓ_2^N, то имеет место ограничение сверху на число векторов этого фрейма*

$$M \leq \frac{N(N+1)}{2}.$$

Пусть

$$V(F) = \begin{pmatrix} |\langle f_1, f_1\rangle|^2 & \dots & |\langle f_1, f_M\rangle|^2 \\ \vdots & & \vdots \\ |\langle f_M, f_1\rangle|^2 & \dots & |\langle f_M, f_M\rangle|^2 \end{pmatrix}$$

Теорема 2. *Следующие два утверждения эквивалентны*

- $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ *— простой фрейм Парсеваля в* ℓ_2^N.
- *Матрица* $V(F)$ *— невырожденная.*

Следствие. *Для того, чтобы произвольный фрейм Парсеваля* $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ *был простым, достаточно чтобы выполнялось неравенство*

$$\frac{|\langle f_i, f_j\rangle|}{\|f_i\|\,\|f_j\|} < \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \forall\, i \neq j$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Casazza P. G., Redmond D., Tremain J. C.* Real Equiangular Frames // CISS Meeting Information Sciences and Systems. Princeton, NJ, 2008.

2. *Рябцов И. С.* О представлении фреймов Парсеваля // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. Вып. 2(23). С. 194-–199.

Н. Ю. Сабурова (Архангельск)
n.saburova@gmail.com

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГРАФЕ[1]

Рассматривается периодический плоский граф Г. Периодическим будем называть граф, для которого можно выделить фундаментальную область W, сдвигами которой на пару неколлинеарных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в $\mathbb{R}^2$ получается весь граф Г. Каждое ребро графа параметризуем параметром $x \in [0, 1]$.

Введем оператор Лапласа $-\Delta_\Gamma$ на графе: на каждом ребре оператор действует как $-\partial_x^2$, и функции f из области определения оператора $-\Delta_\Gamma$ подчинены условию Кирхгофа.

Известно, что в случае, когда граф Г представляет собой квадратную или гексагональную решетку, абсолютно непрерывный спектр оператора Лапласа $\sigma_{ac}(-\Delta_\Gamma) = [0, +\infty)$ [1,2]. В случае треугольной решетки в спектре оператора $-\Delta_\Gamma$ появляется бесконечное число лакун [3]. А как ведет

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК 14.740.11.0581).