К. С. Рютин (Москва)
kriutin@yahoo.com

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ВАПНИКА–ЧЕРВОНЕНКИСА ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ[1]

Пусть F — некоторое множество действительнозначных функций на множестве S. Положим $\operatorname{sgn}(v) = 1$ при $v > 0$, и 0 при $v \le 0$, и для $v = (v_1, \dots v_m) \in \mathbf{R}^m$ положим $\operatorname{sgn}[v] = (\operatorname{sgn}(v_1), \dots \operatorname{sgn}(v_m)) \in \{0;1\}^m$. Всюду ниже $T = \{\tau_1, \dots, \tau_m\} \subset S, v \in \mathbf{R}^m$, S — метрический компакт, $U_\delta(F, f) = \{g \in F : \|g - f\|_{C(S)} \le \delta\}$, для $f \in F \subset C(S), \delta > 0$. Пусть $\nu(F, T, v) = \#\{\operatorname{sgn}[(f(\tau_1) - v_1, \dots f(\tau_m) - v_m)] : f \in F\}$. Для исследования массивности класса функций в теории аппроксимации, математической статистике (теории обучения) (ссылки имеются, например, в [1, 2, 5]) использовались следующие понятия: размерность Вапника – Червоненкиса $\dim_{VC}(F) = \sup\{m : \exists\, T :\ \nu(F, T, 0) = 2^m\}$ и псевдоразмерность $\dim_P F = \sup\{m : \exists\, T, v :\ \nu(F, T, v) = 2^m\}$.

Известно, что для выпуклых множеств $\dim_P$ совпадает с алгебраической размерностью, кроме того в [2] показано, что для любого локально компактного подмножества $F \subset C(S)$ справедливо неравенство $\dim_P F \ge \dim F$.

Представляется естественным определить «локальную» размерность Вапника – Червоненкиса семейства функций в точке $\dim_{vc}(F, f) = \sup\{m : \exists T :\ \lim_{\delta \to +0} \nu(U_\delta(F, f), T, f(T)) = 2^m\}$ (где $f(T) = (f(\tau_j)) \in \mathbf{R}^m$). Размерность класса же $\dim_{vc} F = \sup_{f \in F} \dim_{vc}(F, f)$. Для ряда важных в приложениях классов функций удаётся вычислить $\dim_{vc}$ (всюду предполагается, что S -*- невырожденный отрезок на $\mathbf{R}$), точные же значения $\dim_{VC}, \dim_P$ не найдены.

Для класса экспоненциальных сумм $E_n = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j e^{\alpha_j t} : a_j, \alpha_j \in \mathbf{R} \right\}$ справедливо $\dim_{vc} E_n = 2n$. Для малочленов $FP_n = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j t^{n_j} : a_j \in \mathbf{R},\ n_j \in \mathbf{Z}_+ \right\}$ имеем: $\dim_{vc} FP_n = n$, если $S \subset (0; +\infty)$ и $\dim_{vc} FP_n = 2n$, если $0 \in \operatorname{int} S$. Оценка $\dim_P FP_n$ была получена в [4]. Для множества алгебраических рациональных функций $R_n = \{r(t) = p(t)/q(t) : p, q \in P_n, r \in C(S)\}$ справедливо $\dim_{vc} R_n = 2n + 1$. Для множества билинейных форм $B(V, W) = \{v \cdot w : v \in V, w \in W\}$ (V, W — подпространства), получена линейная по $\dim V, \dim W$ оценка $\dim_{vc} B(V, W)$. Вычислена

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00329).

также $\dim_{vc}$ для множеств нейронных сетей и сплайнов с нефиксированными узлами (определения в [3, 5]).

С. В. Конягин задал вопрос о связи между топологией класса и псевдоразмерностью, который привёл автора к рассмотрению следующей величины (и к определению $\dim_{vc}$): $D(Q) := \min\{\dim_{vc}(F) : F \subset \subset C[0;1], F \approx Q\}$, где Q — метрический компакт и «$\approx$» означает гомеоморфность множеств. Автором установлено, что: если Q вложимо в n-мерный компактный полиэдр, то $D(Q) \leq n$. В последние годы активно исследуются свойства различных размерностей типа Ассуа – Нагата (см., например [6, 7]). Оказывается, что $D(Q) \leq \dim_{AN} Q$ ($\dim_{AN}$ — микроскопическая размерность Ассуа – Нагата).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Assouad P.* // Ann. Inst. Fourier. 1983. Vol. 33, № 3.

2. *Рютин К. С.* // Мат. заметки. 2001. Т. 70, вып. 1.

3. *Andrianov A.* // East J. on Approx. 1999. Vol. 5, № 4.

4. *Karpinski M., Werther T.* // SIAM J. Comp. 1993. Vol. 22, № 6.

5. *Schmitt M.* // Lect. Notes in Artificial Intelligence. Berlin: Springer-Verlag, 2002. Vol. 2533.

6. *Bell G., Dranishnikov A.* // Topology Proc. 2011. Vol. 38. P. 209–236.

7. *Brodskiy N., Dydak J., Higes J., Mitra A.* // Israel J. Math. 2009. Vol. 171. P. 405–423.

И. С. Рябцов (Самара)
tinnulion@gmail.com

КРИТЕРИЙ ПРОСТОТЫ ФРЕЙМА ПАРСЕВАЛЯ

В работе [1] вводятся понятия простого и составного фрейма Парсеваля.

Фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ будем называть *составным*, если существует набор неотрицательных констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что система векторов $F_\alpha = \{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ также является фреймом Парсеваля, при этом хотя бы одна константа α_i равна нулю. В противном случае, будем называть фрейм Парсеваля *простым*.

Теорема 1. *Если $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ — простой фрейм Парсеваля в ℓ_2^N, то имеет место ограничение сверху на число векторов этого фрейма*

$$M \leq \frac{N(N+1)}{2}.$$