В. С. Рыхлов (Саратов)
RykhlovVS@info.sgu.ru

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Рассмотрим в $L_2[0,1]$ краевую задачу для пучка $L(\lambda)$

$$y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y = 0, \tag{1}$$

$$\big(\alpha_{\nu1}y'(0) + \lambda\alpha_{\nu2}y(0)\big) + \big(\beta_{\nu1}y'(1) + \lambda\beta_{\nu2}y(1)\big) = 0, \quad \nu = 1,2, \tag{2}$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$. Пусть корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ удовлетворяют неравенству $0 < \omega_1 < \omega_2$ и $\tau = \omega_2/\omega_1$.

Обозначим $v_{\nu j} = \alpha_{\nu1}\omega_j + \alpha_{\nu2}$, $w_{\nu j} = \beta_{\nu1}\omega_j + \beta_{\nu2}$, $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$, $\nu, j = 1,2$. Пусть $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$, $e_1 = \frac{a_{\bar{1}1}}{a_{\bar{1}2}(\omega_2-\omega_1)}$, $e_2 = \frac{a_{2\bar{2}}}{a_{\bar{1}2}(\omega_2-\omega_1)}$. Тогда характеристический определитель пучка имеет вид $\Delta(\lambda) = \lambda^2\big(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2}a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}a_{12}\big)$. Рассмотрим случай $a_{12} = a_{1\bar{2}} = 0$ и линеаризуем задачу (1)–(2). Положим $v_0 = y$, $v_1 = \lambda v_0$. Тогда получим следующую задачу на собственные значения уже для линейного оператора $\hat{L}$, но в пространстве вектор-функций:

$$v_1 = \lambda v_0, \quad -\frac{1}{p_2}v_0'' - \frac{p_1}{p_2}v_1' = \lambda v_1,$$

$$\big(\alpha_{\nu1}y'(0) + \lambda\alpha_{\nu2}y(0)\big) + \big(\beta_{\nu1}y'(1) + \lambda\beta_{\nu2}y(1)\big) = 0, \quad \nu = 1,2.$$

Собственные значения $L(\lambda)$ и $\hat{L}$ совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ совпадает с системой собственных вектор-функций $\hat{L}$. Пусть $\big(\hat{L} - \lambda E\big)^{-1}f = \big(v_0(x,\lambda), v_1(x,\lambda)\big)^T$, где $f = (f_0, f_1)^T$.

Теорема. *Если* f_0'', $f_1' \in L_1[0,1]$ *и*

$$f_0(0) = f_0(1) = f_0'(0) = f_0'(1) = f_1(0) = f_1(1) = 0,$$

то

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda)\,d\lambda = f_0(x) + \big(e_2\omega_2 f_0\left(\tfrac{x}{\tau}\right) - e_1\omega_1 f_0(\tau x + \tau - 1) +$$

$$+\omega_1 f_0(x)\big) + p_2\left(-e_2F_1\left(\tfrac{x}{\tau}\right) + e_1F_1(\tau x + \tau - 1) - F_1(x)\right) + o(1)$$

при $\nu \to \infty$, *где* $F_1(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$, *а* Γ_ν — *круговой контур с центром в начале координат и радиуса* $\pi\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).