где $M > 0$, $c > 0$, $\pi_p(z, \alpha_k)$ — произведение М. М. Джрбашяна с нулями в точках $\{\alpha_k\}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $p > \alpha$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М. М.* О параметрическом представлении некоторых классов мероморфных функций в единичном круге // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157(5). С. 1024–1027.

2. *Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н.* Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций. Брянск: БГУ, 2009. 152 с.

3. *Nikolski N. K.* Operators, functions and systems. Amer. Math. Soc., 2002. Vol. 92. 460 p.

4. *Seip K.* Interpolation and sampling in spaces of analytic functions. Amer. Math. Soc., 2004. 183 p.

Е. Г. Родикова, Ф. А. Шамоян (Брянск)
evheny@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССОВ И. И. ПРИВАЛОВА

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ — множество всех аналитических в D функций. Классом И. И. Привалова назовем следующий класс функций (см. [1]):

$$\Pi_p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^p d\theta < +\infty \right\},$$

$$0 < p < +\infty,$$

где $\ln^+ a = \max\{\ln a, 0\}$, $a \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Очевидно, что $H^\infty \subset \Pi_p$ при всех $0 < p < +\infty$, где класс H^∞ — класс ограниченных аналитических функций. При $p = 1$ класс И. И. Привалова совпадает с классом Р. Неванлинны функций ограниченного вида, т. е. $\Pi_1 = N$. При $1 < p < +\infty$ $\Pi_p \subset N$, и поэтому его корневые множества характеризуются условием Бляшке. Однако при $0 < p < 1$ условие Бляшке уже не является необходимым (см. [2]). Следующая теорема уточняет результат работы [2]:

Теорема. *Если $f \in \Pi_p$, $0 < p < 1$, $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f \not\equiv 0$, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\frac{1}{p}} \ln^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right) < +\infty.$$

Обратно, $\exists\, f \in \Pi_p$ *и* $\exists\, \{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $z_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, *такие что* $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f \neq 0$, *но*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\frac{1}{p}} \ln^{\frac{1+\varepsilon}{p}} \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right) = +\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Привалов И. И.* Субгармонические функции. М.; Л., 1937. 200 с.

2. *Шамоян Ф. А., Беднаж В. А., Приходько О. В.* О нулевых множествах некоторых весовых классов аналитических в круге функций // Вестн. Брянск. гос. ун-та. 2008. Вып. 4. С. 85–92.

Т. В. Родионов (Москва)
rodionovtv@mail.ru

О РАВЕНСТВЕ БОРЕЛЕВСКИХ И БЭРОВСКИХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ[1]

Пусть T — топологическое пространство с семействами $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, и $\mathcal{B}$ открытых, замкнутых и борелевских множеств. Известно, что $\mathcal{B} = \Lambda_{\omega_1}$, где $\Lambda_1 \equiv \mathcal{F}_\sigma$, $\Lambda_2 \equiv \mathcal{G}_{\delta\sigma}$, $\Lambda_3 \equiv \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}$, $\Lambda_4 \equiv \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta\sigma}$, … для совершенного T [1, 30.II], и $\Lambda_1 \equiv \mathcal{K}_\sigma$, $\Lambda_2 \equiv \mathcal{L}_{\delta\sigma}$, $\Lambda_3 \equiv \mathcal{K}_{\sigma\delta\sigma}$, $\Lambda_4 \equiv \mathcal{L}_{\delta\sigma\delta\sigma}$, …, где $\mathcal{K} \equiv \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G}, F \in \mathcal{F}\}$ (семейство *симметризуемых множеств*), $\mathcal{L} \equiv \{G \cup F \mid G \in \mathcal{G}, F \in \mathcal{F}\}$ для произвольного T [2].

Пусть X — нормированное пространство, $\mathcal{S}$ — некоторое непустое семейство подмножеств T. Через $M(T, \mathcal{S}, X)$ обозначим семейство всех $\mathcal{S}$-*измеримых функций* $f : T \to X$, т. е. таких, что прообраз любого открытого шара принадлежит $\mathcal{S}$. В частности, получаем семейство непрерывных функций $C(T, X) \equiv M(T, \mathcal{G}, X)$ и семейство $B_\alpha(T, X) \equiv M(T, \Lambda_\alpha, X)$ *борелевских функций класса* α, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$.

Для произвольного семейства $A(T, X)$ функций на T со значениями в X определим соответствующие *классы Бэра*: $\mathrm{Lim}_\alpha A(T, X)$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant \omega_1)$ состоит из всевозможных поточечных пределов функций классов $\mathrm{Lim}_\beta A(T, X)$, $0 \leqslant \beta < \alpha$, $\mathrm{Lim}_0 A(T, X) \equiv A(T, X)$.

Для метрического T и $X = \mathbb{R}$ известны равенства $\mathrm{Lim}_\alpha C(T, \mathbb{R}) = B_\alpha(T, \mathbb{R})$ при $1 \leqslant \alpha < \omega_0$ и $\mathrm{Lim}_\alpha C(T, \mathbb{R}) = B_{\alpha+1}(T, \mathbb{R})$ при $\omega_0 \leqslant \alpha < \omega_1$ (теорема Лебега–Хаусдорфа [1, 31.IX]). Для метрического T и сепарабельного метрического X верны равенства $\mathrm{Lim}_\alpha M(T, \mathcal{F}_\sigma, X) = B_{\alpha+1}(T, X)$, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$ (теорема Банаха [1, 31.IX]).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321) и грантов Президента РФ (МК-833.2012.1, НШ-979.2012.1).