Рассматривается следующая краевая задача.

Задача D. *Требуется найти все квазигармонические функции рода n $(n \geq 1)$, принадлежащие классу $C^n(T^+ + L)$ и удовлетворяющие на L условию:*

$$W(t) + G(t)\overline{W(t)} = g(t), \tag{3}$$

где $W(t) = \lim\limits_{z \to t \in L} W(z)$, а $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на контуре L функции класса $H(L)$ (т.е. удовлетворяющие на контуре L условию Гельдера).

В дальнейшем задачу **D** будем называть *видоизмененной задачей типа Дирихле для квазигармонических функций рода n*. Если же в (3) $g(t) \equiv 0$, то соответствующую задачу называем *однородной видоизмененной задачей типа Дирихле* (короче, *задачей* $\mathbf{D^0}$).

Ясно, что если $G(t) \equiv 0$, то задача **D** представляет собой обычную (*классическую*) краевую задачу Дирихле для квазигармонических функций.

В настоящем сообщении излагается конструктивный метод решения краевой задачи **D** в классах квазигармонических функций второго рода в круге $T^+ = \{z : \ |z| < 1\}$ в следующих двух случаях: $G(t) \equiv 0$ и $G(t) \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bauer K. W.* Uber eine der Differentialgleichung $(1+z\overline{z})^2 W_{z\overline{z}} \pm n(n++1)W = = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. Schrften 23 (1965).

2. *Heersink R.* Uber Losungen der Bauer – Peschl – Gleichung und polyanalytische Funktionen // Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum, Bericht. 1986. № 268.

Е. Г. Родикова, Ф. А. Шамоян (Брянск)
evheny@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

СВОБОДНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ ХАРАКТЕРИСТИКИ Р. НЕВАНЛИННЫ

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ — множество всех аналитических в D функций. Введем в рассмотрение следующие классы функций (см. [1, 2]):

$$S_\alpha^\infty = \left\{ f \in H(D) : T(r, f) \leq \frac{C_f}{(1-r)^\alpha}, \ \alpha > 0, \ C_f > 0 \right\},$$

где $T(r, f)$ — характеристика Р. Неванлинны функции f,

$$N_\alpha = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln |f(te^{i\theta})| \, dt \right)^+ d\theta < +\infty, \alpha > -1 \right\}.$$

Решению интерполяционных задач в различных классах голоморфных в круге функций посвящено множество работ (см., например, [3, 4]). Методы их решения также различны. Мы описываем следы классов N_α, S_α^∞ на последовательности точек $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$, находящихся в конечном числе углов Штольца. Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *— последовательность различных комплексных чисел, расположенных в конечном числе углов Штольца, т.е.* $\{\alpha_k\} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Gamma(\theta_k)$, *где* $\Gamma(\theta_k)$ *— угол Штольца с вершиной в точке* $e^{i\theta_k}$. *Для того, чтобы оператор* $R(f) = (f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_k), \ldots)$ *отображал пространство* N_α *на пространство*

$$l_\alpha = \left\{ \gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} : |\gamma_k| \le \exp \frac{\delta}{(1 - |\alpha_k|)^{\alpha+2}}, \delta > 0 \right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|)^{\alpha+2} < +\infty, \quad |\pi_p'(\alpha_k)| \ge \exp \frac{-M}{(1 - |\alpha_k|)^{\alpha+2}},$$

где $M > 0$, $\pi_p(z, \alpha_k)$ *— произведение М. М. Джрбашяна с нулями в точках* $\{\alpha_k\}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $p > \alpha$ *(см. [1])*

$$\pi_p(z, \alpha_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{\alpha}_k(\alpha_k - z)}{1 - \overline{\alpha}_k z} \exp \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j} \left(\frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - \overline{\alpha}_k z} \right)^j.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$*- последовательность различных комплексных чисел, расположенных в конечном числе углов Штольца, т.е.* $\{\alpha_k\} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Gamma(\theta_k)$. *Для того, чтобы оператор* $R(f) = (f(\alpha_1), \ldots \ldots, f(\alpha_k), \ldots)$ *отображал пространство* S_α^∞ *на пространство*

$$l_\alpha^\infty = \left\{ \gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} : |\gamma_k| \le \exp \frac{\delta}{(1 - |\alpha_k|)^{\alpha+1}}, \delta > 0 \right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$n(r) \le \frac{c}{(1 - r)^{\alpha+1}},$$

где $n(r) = \{card\, z_k : |z_k| < r\}$,

$$|\pi_p'(\alpha_k)| \ge \exp \frac{-M}{(1 - |\alpha_k|)^{\alpha+1}},$$

где $M > 0$, $c > 0$, $\pi_p(z, \alpha_k)$ — произведение М. М. Джрбашяна с нулями в точках $\{\alpha_k\}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $p > \alpha$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М. М.* О параметрическом представлении некоторых классов мероморфных функций в единичном круге // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157(5). С. 1024–1027.

2. *Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н.* Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций. Брянск: БГУ, 2009. 152 с.

3. *Nikolski N. K.* Operators, functions and systems. Amer. Math. Soc., 2002. Vol. 92. 460 p.

4. *Seip K.* Interpolation and sampling in spaces of analytic functions. Amer. Math. Soc., 2004. 183 p.

Е. Г. Родикова, Ф. А. Шамоян (Брянск)
evheny@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССОВ И. И. ПРИВАЛОВА

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ — множество всех аналитических в D функций. Классом И. И. Привалова назовем следующий класс функций (см. [1]):

$$\Pi_p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^p d\theta < +\infty \right\},$$

$$0 < p < +\infty,$$

где $\ln^+ a = \max\{\ln a, 0\}$, $a \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Очевидно, что $H^\infty \subset \Pi_p$ при всех $0 < p < +\infty$, где класс H^∞ — класс ограниченных аналитических функций. При $p = 1$ класс И. И. Привалова совпадает с классом Р. Неванлинны функций ограниченного вида, т. е. $\Pi_1 = N$. При $1 < p < +\infty$ $\Pi_p \subset N$, и поэтому его корневые множества характеризуются условием Бляшке. Однако при $0 < p < 1$ условие Бляшке уже не является необходимым (см. [2]). Следующая теорема уточняет результат работы [2]:

Теорема. *Если $f \in \Pi_p$, $0 < p < 1$, $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f \not\equiv 0$, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\frac{1}{p}} \ln^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right) < +\infty.$$