и $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При $\lambda \neq 1/2$ уравнение границы искомой области выражается неявно через эллиптические интегралы первого рода и третьего рода.

Полученные результаты распространяют исследования Н.А. Лебедева о функционале $f(z_0)/F(\zeta_0)$ на классе $\mathbf{M}$, опубликованные в ДАН СССР [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев Н. А.* Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1070–1073.

К. М. Расулов (Смоленск)
kahrimanr@yandex.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ДИРИХЛЕ В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Пусть T^+ — конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L.

Многие физические задачи, связанные, например, с диффузией газа при наличии распада и при цепных реакциях приводятся к дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\overline{z})^2} W = 0, \tag{1}$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, n — некоторое фиксированное неотрицательное целое число, $W(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ — неизвестная функция.

Ясно, что если в (1) положить $n = 0$, то регулярные решения этого уравнения в области T^+ представляют собой класс *гармонических в* T^+ *функций.*

Всюду в дальнейшем при $n \geq 1$ регулярные в области T^+ решения уравнения (1) будем называть *квазигармоническими функциями рода* n *в области* T^+.

Известно $[1, 2]$, что *всякую квазигармоническую функцию рода* n *в области* T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \tag{2}$$

где $A_k^n := (-1)^{n-k}\frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ — *аналитическая* (*голоморфная*) в области T^+ функция.

Рассматривается следующая краевая задача.

Задача D. *Требуется найти все квазигармонические функции рода* n $(n \geq 1)$, *принадлежащие классу* $C^n(T^+ + L)$ *и удовлетворяющие на* L *условию*:

$$W(t) + G(t)\overline{W(t)} = g(t), \tag{3}$$

где $W(t) = \lim\limits_{z \to t \in L} W(z)$, *а* $G(t)$ *и* $g(t)$ — *заданные на контуре* L *функции класса* $H(L)$ (*т.е. удовлетворяющие на контуре* L *условию Гельдера*).

В дальнейшем задачу **D** будем называть *видоизмененной задачей типа Дирихле для квазигармонических функций рода* n. Если же в (3) $g(t) \equiv 0$, то соответствующую задачу называем *однородной видоизмененной задачей типа Дирихле* (короче, *задачей* $\mathbf{D^0}$).

Ясно, что если $G(t) \equiv 0$, то задача **D** представляет собой обычную (*классическую*) краевую задачу Дирихле для квазигармонических функций.

В настоящем сообщении излагается конструктивный метод решения краевой задачи **D** в классах квазигармонических функций второго рода в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ в следующих двух случаях: $G(t) \equiv 0$ и $G(t) \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bauer K. W.* Uber eine der Differentialgleichung $(1+z\overline{z})^2 W_{z\overline{z}} \pm n(n++1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. Schrften 23 (1965).

2. *Heersink R.* Uber Losungen der Bauer – Peschl – Gleichung und polyanalytische Funktionen // Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum, Bericht. 1986. № 268.

Е. Г. Родикова, Ф. А. Шамоян (Брянск)
evheny@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

СВОБОДНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ ХАРАКТЕРИСТИКИ Р. НЕВАНЛИННЫ

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ — множество всех аналитических в D функций. Введем в рассмотрение следующие классы функций (см. [1, 2]):

$$S_\alpha^\infty = \left\{ f \in H(D) : T(r, f) \leq \frac{C_f}{(1-r)^\alpha},\ \alpha > 0,\ C_f > 0 \right\},$$

где $T(r, f)$ — характеристика Р. Неванлинны функции f,

$$N_\alpha = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln |f(te^{i\theta})|\, dt \right)^+ d\theta < +\infty, \alpha > -1 \right\}.$$