В. А. Пчелинцев (Томск)
VPchelintsev@vtomske.ru

ОДНА ЗАДАЧА О НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЯХ

Исследуется множество E значений функционала

$$\xi(f,F)=\ln\frac{f(z_0)^\lambda}{F(\zeta_0)^{1-\lambda}},\quad 0<\lambda<1,$$

при фиксированных z_0 и ζ_0, $0<|z_0|<1$ и $1<|\zeta_0|<\infty$, на классе $\mathbf{M}$ пар функций, однолистных в системе круг – внешность круга. Установленно, что множество E замкнуто связно ограниченно. Для решения задачи используется вариационный метод Голузина и параметрический метод Лёвнера. Доказано, что каждая экстремальная пара функций $(f(z),F(\zeta))\in\mathbf{M}$ функционала $\xi(f,F)$, вносящая граничную точку в E, удовлетворяет следующей системе функционально-дифференциальных уравнений

$$e^{-i\alpha}\frac{\big((1-2\lambda)f(z)-(1-\lambda)f(r)+\lambda F(\rho)\big)f'^2(z)}{f(z)(f(z)-F(\rho))(f(z)-f(r))}=\frac{\lambda C}{z(r-z)(1-rz)},$$

$$e^{-i\alpha}\frac{\big((1-2\lambda)F(\zeta)-(1-\lambda)f(r)+\lambda F(\rho)\big)F'^2(\zeta)}{F(\zeta)(F(\zeta)-F(\rho))(F(\zeta)-f(r))}=\frac{(1-\lambda)D}{\zeta(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)},$$

где $0\le\alpha<2\pi$, $r=|z_0|$, $\rho=|\zeta_0|$ и

$$C=e^{-i\alpha}\frac{rf'(r)}{f(r)}(1-r^2)>0,\quad D=e^{-i\alpha}\frac{\rho F'(\rho)}{f(\rho)}(\rho^2-1)>0.$$

Анализируя полученную систему уравнений заключаем, что общей границей образа единичного круга и его внешности при отображении экстремальной парой функций является замкнутая жорданова аналитическая кривая.

Интегрируя первое из уравнений по z от 0 до r, от 0 до -1, затем по дуге $|z|=1$ против часовой стрелки от -1 до $e^{i\varphi}$ ($\pi\le\varphi<3\pi$), а второе по ζ от ρ до ∞ и от 1 до ρ, находим уравнение границы области E значений функционала $\xi(f,F)=\ln(f(r)/F(\rho))^{1/2}$:

$$\xi(\nu)=\ln\left(16q\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right]^8\right),\quad 0\le\nu<2,$$

где

$$q=e^{-\pi\mu},\quad \mu=\frac{1}{2}\left\{\frac{K(\sqrt{1-r^2})}{K(r)}+\frac{K(\sqrt{1-1/\rho^2})}{K(1/\rho)}\right\}+\nu i$$

и $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При $\lambda \neq 1/2$ уравнение границы искомой области выражается неявно через эллиптические интегралы первого рода и третьего рода.

Полученные результаты распространяют исследования Н.А. Лебедева о функционале $f(z_0)/F(\zeta_0)$ на классе $\mathbf{M}$, опубликованные в ДАН СССР [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев Н. А.* Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1070–1073.

К. М. Расулов (Смоленск)
kahrimanr@yandex.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ДИРИХЛЕ В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Пусть T^+ — конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L.

Многие физические задачи, связанные, например, с диффузией газа при наличии распада и при цепных реакциях приводятся к дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\overline{z})^2} W = 0, \tag{1}$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, n — некоторое фиксированное неотрицательное целое число, $W(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ — неизвестная функция.

Ясно, что если в (1) положить $n = 0$, то регулярные решения этого уравнения в области T^+ представляют собой класс *гармонических в* T^+ *функций.*

Всюду в дальнейшем при $n \geq 1$ регулярные в области T^+ решения уравнения (1) будем называть *квазигармоническими функциями рода* n *в области* T^+.

Известно [1, 2], что *всякую квазигармоническую функцию рода* n *в области* T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \tag{2}$$

где $A_k^n := (-1)^{n-k}\frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ — *аналитическая* (*голоморфная*) в области T^+ функция.