Неподвижная точка построена с использование наименьших корней. Если используем наибольшие корни, то также будет построена неподвижная точка. В частности, если хотя бы при одной координате $f_j(\tau,\xi)$ наименьший $\xi(\tau)$ и наибольший $\eta(\tau)$ корни уравнения $f_j(\tau,\xi)-\xi=0$ удовлетворяют условию $\min|\xi(\tau)-\eta(\tau)|>0$, то у f, по крайней мере, — две неподвижные точки.

С. Р. Насыров (Казань)
snasyrov@ksu.ru

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ И УРАВНЕНИЕ Ф. Д. ГАХОВА[1]

В докладе дается обзор результатов о разрешимости внешних обратных и смешанных обратных краевых задач, ставятся нерешенные проблемы.

Обратные и смешанные обратные краевые задачи или краевые задачи с неизвестной (свободной) границей являются важным разделом теории функций комплексного переменного (см., напр., [1–3]). Они состоят в определении области D_z с полностью или частично неизвестной границей и голоморфной в ней функции $w=w(z)$ по краевым условиям на границе этой области. При этом, на неизвестных участках границы краевые условия задаются в терминах некоторого геометрического параметра: дуговой абсциссы s, декартовой координаты x или y, полярной координаты r или φ. Если граница области полностью неизвестна, то такая задача называется обратной, если частично неизвестна — то смешанной обратной.

Решение задачи, как правило, сводится к определению функции $z=$ $=z(\zeta)$, конформно отображающей каноническую область D_ζ на область D_z. В односвязном случае в качестве D_ζ, как правило, берется единичный круг или верхняя полуплоскость. Поскольку по функции $z=z(\zeta)$ однозначно определяются область D_z и функция $w=w(z)$, то часто именно эту функцию и называют решением задачи.

Если искомая область содержит внутри себя бесконечно удаленную точку, то соответствующая задача называется внешней. В этом случае функция $z=z(\zeta)$ имеет полюс в некоторой точке $\zeta_0\in D_\zeta$. При этом возникает условие разрешимости задачи, которое можно рассматривать как уравнение для определения точки ζ_0.

Впервые такое уравнение получил Ф. Д. Гахов для обратной краевой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00762).

задачи по параметру s (см., напр., [4]). Это уравнение имеет вид

$$\frac{f''(\zeta_0)}{f''(\zeta_0)} = \frac{2\overline{\zeta_0}}{1-|\zeta_0|^2}. \tag{$*$}$$

Здесь f — голоморфная функция, однозначно определяемая по краевым условиям, в качестве D_ζ берется единичный круг. Множество решений уравнения $(*)$ — это множество решений некоторой полианалитической функции. Ф. Д. Гахов доказал разрешимость уравнения $(*)$. В дальнейшем уравнение $(*)$ и его обобщения стали называть уравнением Гахова.

Исследование многих известных математиков связаны с изучением множества корней уравнения $(*)$. В этой связи можно упомянуть работы проф. Л. А. Аксентьева и его учеников. В частности, Л. А. Аксентьевым было замечено, что решения уравнения Гахова соответствуют критическим точкам поверхности, которая является графиком отображения — внутреннего радиуса области как функции от ее точки. Основное внимание было уделено вопросам единственности решения уравнения $(*)$. Однако только в 1990 г. в [5] было установлено, что множество корней уравнения $(*)$ конечно. Также в этой статье было описано структура множества корней уравнения Гахова в многосвязном случае (за D_ζ берется n-круговая область). Было показано, что множество решений непусто и состоит из объединения не более чем конечного числа точек и не более чем конечного числа гомологически независимых в D_ζ замкнутых аналитических кривых. До сих пор остается открытым вопрос: *существуют ли примеры, в которых число замкнутых аналитических кривых в множестве корней уравнения Гахова равно заданному значению* k, $2 \le k \le n-1$?

Уравнение Гахова для смешанных обратных краевых задач по параметру x было впервые получено в [6]. Далее оно обобщалось в работах [7, 8] на случай, когда смешанная обратная краевая задача рассматривается на полигональной римановой поверхности, которая имеет точку ветвления над бесконечно удаленной точкой. Было показано, что соответствующее уравнение Гахова разрешимо. Однако не решенным остается вопрос *о структуре корней этого уравнения*. Кроме того, разрешимость уравнения Гахова является только необходимым условием разрешимости задачи. Актуальной является *проблема разрешимости внешней обратной краевой задачи по параметру x как на плоскости, так и на римановой поверхности*. Не исследован и вопрос *о разрешимости уравнения Гахова на римановой поверхности с несколькими точками, лежащими над* ∞.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тумашев Г. Г., Нужин М. Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. 333 с.

2. *Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нужин М. Т., Салимов Р. Б., Тумашев Г. Г.* Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения // Мат. анализ Т. 18. (Итоги науки и техники). М.: ВИНИТИ. 1980. С. 69–126.

3. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, 1977. 424 с.

4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 2-е изд, 1977. 641 с.

5. *Киселев А.В., Насыров С.Р.* О структуре множества корней уравнения Ф.Д.Гахова для односвязной и многосвязной областей // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1990. Вып. 24. С. 105–115.

6. *Насыров С. Р., Галиуллина Г. Р.* Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 25–30.

7. *Насыров С. Р., Низамиева Л. Ю.* Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности с простой точкой ветвления на бесконечности // Учен. записки Казанск. гос. ун-та. 2008. Т. 150. Сер. физ.-мат. Кн. 1. С. 91–101.

8. *Насыров С. Р., Низамиева Л. Ю.* Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи на римановой поверхности с точкой ветвления на бесконечности произвольного порядка // Вестн. Самарского гос. ун-та. Сер. естественнонаучн. 2009. No 4. С. 28–42.

В. В. Новиков (Саратов)
vvnovikov@yandex.ru

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ БИРКГОФА ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ УПОРЯДОЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ[1]

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство действительных непрерывных на $\mathbb{R}$ 2π-периодических функций с равномерной нормой. Обозначим через $Q_n(f,x)$, $n = 1,2,\ldots$, тригонометрический (0,2,3)-интерполяционный многочлен Биркгофа (см., например, [1]) функции $f \in C_{2\pi}$ с узлами $\{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1)\}_{k=-n}^{n}$ такой, что

$$Q_n(f,x_{k,n}) = f(x_{k,n}), \quad Q_n''(f,x_{k,n}) = Q_n'''(f,x_{k,n}) = 0, \quad k = \overline{-n,n}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).