СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мисюк В. Р.* Теоремы типа Джексона и Бернштейна для наилучших полиномиальных приближений в пространстве Бергмана // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Сер. 2. Фізыка. Матэматыка. Інфарматыка. 2006. № 1. С. 58–62.

В. С. Мокейчев (Казань)
Valery.Mokeychev@ksu.ru

ТЕОРЕМА БРАУЕРА О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ (ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И УТОЧНЕНИЯ)

В 1903 году на математическом конгрессе Брауер сообщил об утверждении: *если функция f непрерывно отображает замкнутый, выпуклый симплекс из R^n в себя, то функция имеет неподвижную точку.* В 1910 году было опубликовано частично подробное доказательство. Оно содержит сложные топологические рассуждения, специальные топологические объекты. Не случайно, нет учебников, по крайней мере, в России, где подробно была бы доказана эта теорема. Теорема Брауера была обобщена на случай, когда вместо симплекса используется ограниченное, замкнутое, выпуклое множество. Она не даёт ответ на вопрос: в каких случаях имеется не менее двух неподвижных точек. Предлагается простое доказательство теоремы Брауера и выделяются случае, когда неподвижных точек не менее двух. В доказательстве *будут использоваться только те результаты, которые были известны задолго до появления теоремы Брауера.* Ниже $g(\tau, \xi)$ — скалярная, непрерывная, вещественная функция аргументов $\tau \in [a,\ b] \subset R^{n-1}$, $\xi \in [a_n, b_n] \in R$, удовлетворяющая условиям $g(\tau, a_n) > 0$, $g(\tau, b_n) < 0$, $\xi(\tau)$ — наименьший корень уравнения $g(\tau, \xi) = 0$. Функция $g(\tau, \xi)$ (как функция аргумента $\xi \in R$) меняет знак в точке $\xi(\tau)$, если существуют $x_k \to \xi(\tau - 0)$, $y_k \to \xi(\tau + 0)$, для которых $g(\tau, x_k)g(\tau, y_k) < 0$.

Лемма 1. *Если в точке $\xi(\tau)$ функция $g(\tau, \xi)$ (как функция аргумента ξ) меняет знак, то $\xi(\tau)$ непрерывно зависит от τ.*

Лемма 2. *Для каждого ε существует такая непрерывная функция $g_\varepsilon(\tau.\xi)$, что $|g(\tau, \xi) - g_\varepsilon(\tau, \xi)| < \varepsilon$, и функция $g_\varepsilon(\tau, \xi)$ (как функция аргумента ξ) меняет знак в точке $\xi_\varepsilon(\tau)$ — наименьшего корня уравнения $g_\varepsilon(\tau, \xi) = 0$.*

С использованием этих лемм методом математической индукции доказывается теорема Брауера для случая $f : [\hat{a}, \hat{b}] \to (\hat{a}, \hat{b}) \subset R^n$. Так как непрерывная на замкнутом, звёздном множестве $\Omega \subset R^n$ функция f со значениями в Ω продолжается до непрерывной функции $\hat{f} : [\hat{a}, \hat{b}] \to \Omega \subset \subset (\hat{a}, \hat{b})$, то теорема Брауера верна для звёздных множеств.

Неподвижная точка построена с использование наименьших корней. Если используем наибольшие корни, то также будет построена неподвижная точка. В частности, если хотя бы при одной координате $f_j(\tau,\xi)$ наименьший $\xi(\tau)$ и наибольший $\eta(\tau)$ корни уравнения $f_j(\tau,\xi)-\xi=0$ удовлетворяют условию $\min|\xi(\tau)-\eta(\tau)|>0$, то у f, по крайней мере, — две неподвижные точки.

С. Р. Насыров (Казань)
snasyrov@ksu.ru

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ И УРАВНЕНИЕ Ф. Д. ГАХОВА[1]

В докладе дается обзор результатов о разрешимости внешних обратных и смешанных обратных краевых задач, ставятся нерешенные проблемы.

Обратные и смешанные обратные краевые задачи или краевые задачи с неизвестной (свободной) границей являются важным разделом теории функций комплексного переменного (см., напр., [1–3]). Они состоят в определении области D_z с полностью или частично неизвестной границей и голоморфной в ней функции $w=w(z)$ по краевым условиям на границе этой области. При этом, на неизвестных участках границы краевые условия задаются в терминах некоторого геометрического параметра: дуговой абсциссы s, декартовой координаты x или y, полярной координаты r или φ. Если граница области полностью неизвестна, то такая задача называется обратной, если частично неизвестна — то смешанной обратной.

Решение задачи, как правило, сводится к определению функции $z=z(\zeta)$, конформно отображающей каноническую область D_ζ на область D_z. В односвязном случае в качестве D_ζ, как правило, берется единичный круг или верхняя полуплоскость. Поскольку по функции $z=z(\zeta)$ однозначно определяются область D_z и функция $w=w(z)$, то часто именно эту функцию и называют решением задачи.

Если искомая область содержит внутри себя бесконечно удаленную точку, то соответствующая задача называется внешней. В этом случае функция $z=z(\zeta)$ имеет полюс в некоторой точке $\zeta_0\in D_\zeta$. При этом возникает условие разрешимости задачи, которое можно рассматривать как уравнение для определения точки ζ_0.

Впервые такое уравнение получил Ф. Д. Гахов для обратной краевой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00762).