В. Р. Мисюк (Гродно, Беларусь)
misiuk@grsu.by

О НЕКТОРЫХ НАИЛУЧШИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

Пусть $\mathcal{P}_n$ – множество алгебраических многочленов степени не выше n. Для функции f из пространства Харди H_p, $0 < p \leqslant \infty$, в круге $D = \{z : |z| < 1\}$, через $E_n(f)_p$ обозначим её наилучшее приближение посредством множества $\mathcal{P}_n$. Хорошо известно следующая импликация, называемая соответственно теоремой типа Джексона:

$$f^{(s)} \in H_p \quad \Longrightarrow \quad E_n(f)_p \leqslant \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{H_p} \quad \text{при} \quad n \geqslant s,$$

где $c > 0$ и зависит лишь от p и s, а $f^{(s)}$ — s-я производная ($s \in \mathbb{N}$) функции f. Для $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ введём в рассмотрение функцию $f_\alpha(z) = (1-z)^\alpha$, где главная ветвь степени берётся в области $\mathbb{C} \backslash [1, \infty)$. Из выше упомянутой импликации можно показать, что при $n \to \infty$ имеет место слабая эквивалентность:

$$E_n(f_\alpha)_p \asymp n^{-\alpha - \frac{1}{p}}, \quad \alpha \in \left(-\frac{1}{p}, \infty\right) \backslash \mathbb{Z}\,.$$

Через $A_p = A_p(D)$, $0 < p \leqslant \infty$, обозначим пространство Бегмана аналитических функций f в D, наделённых конечной квазинормой $\|f\|_{A_p} = \|f\|_{L_p(D)}$ (нормой при $1 \leqslant p \leqslant \infty$) относительно плоской меры Лебега. Для $f \in A_p(D)$ введём

$$E_n(f)_{A_p} = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|_{A_p(D)}, \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,$$

— наилучшее приближение функции f в пространстве A_p посредством множества $\mathcal{P}_n$. Запишем аналог теоремы типа Джексона [1] в пространстве Бергмана: *если $s \in \mathbb{N}$ и $f^{(s)} \in A_p(D)$, $0 < p < \infty$, то*

$$E_n(f)_{A_p} \leqslant \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{A_p}, \qquad n = s,\, s+1,\, \ldots\ ,$$

где $c > 0$ и не зависит от f и n.

Так нами показано, что при $n \to \infty$ имеет место соответствующая слабая эквивалентность

$$E_n(f_\alpha)_p \asymp n^{-\alpha - \frac{2}{p}}, \qquad \alpha \in \left(-\frac{2}{p}, \quad \infty\right) \backslash \mathbb{Z}\,.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мисюк В. Р.* Теоремы типа Джексона и Бернштейна для наилучших полиномиальных приближений в пространстве Бергмана // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Сер. 2. Фізыка. Матэматыка. Інфарматыка. 2006. № 1. С. 58–62.

В. С. Мокейчев (Казань)
Valery.Mokeychev@ksu.ru

ТЕОРЕМА БРАУЕРА О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ (ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И УТОЧНЕНИЯ)

В 1903 году на математическом конгрессе Брауэр сообщил об утверждении: *если функция f непрерывно отображает замкнутый, выпуклый симплекс из R^n в себя, то функция имеет неподвижную точку.* В 1910 году было опубликовано частично подробное доказательство. Оно содержит сложные топологические рассуждения, специальные топологические объекты. Не случайно, нет учебников, по крайней мере, в России, где подробно была бы доказана эта теорема. Теорема Брауера была обобщена на случай, когда вместо симплекса используется ограниченное, замкнутое, выпуклое множество. Она не даёт ответ на вопрос: в каких случаях имеется не менее двух неподвижных точек. Предлагается простое доказательство теоремы Брауера и выделяются случае, когда неподвижных точек не менее двух. В доказательстве *будут использоваться только те результаты, которые были известны задолго до появления теоремы Брауера.* Ниже $g(\tau,\xi)$ — скалярная, непрерывная, вещественная функция аргументов $\tau \in [a,\ b] \subset R^{n-1}$, $\xi \in [a_n, b_n] \in R$, удовлетворяющая условиям $g(\tau, a_n) > 0$, $g(\tau, b_n) < 0$, $\xi(\tau)$ — наименьший корень уравнения $g(\tau,\xi) = 0$. Функция $g(\tau,\xi)$ (как функция аргумента $\xi \in R$) меняет знак в точке $\xi(\tau)$, если существуют $x_k \to \xi(\tau - 0)$, $y_k \to \xi(\tau + 0)$, для которых $g(\tau, x_k)g(\tau, y_k) < 0$.

Лемма 1. *Если в точке $\xi(\tau)$ функция $g(\tau,\xi)$ (как функция аргумента ξ) меняет знак, то $\xi(\tau)$ непрерывно зависит от τ.*

Лемма 2. *Для каждого ε существует такая непрерывная функция $g_\varepsilon(\tau.\xi)$, что $|g(\tau,\xi) - g_\varepsilon(\tau,\xi)| < \varepsilon$, и функция $g_\varepsilon(\tau,\xi)$ (как функция аргумента ξ) меняет знак в точке $\xi_\varepsilon(\tau)$ — наименьшего корня уравнения $g_\varepsilon(\tau,\xi) = 0$.*

С использованием этих лемм методом математической индукции доказывается теорема Брауера для случая $f : [\hat{a}, \hat{b}] \to (\hat{a}, \hat{b}) \subset R^n$. Так как непрерывная на замкнутом, звёздном множестве $\Omega \subset R^n$ функция f со значениями в Ω продолжается до непрерывной функции $\hat{f} : [\hat{a}, \hat{b}] \to \Omega \subset$ $\subset (\hat{a}, \hat{b})$, то теорема Брауера верна для звёздных множеств.