В. В. Арестов, П. Ю. Глазырина (Екатеринбург)
Vitalii.Arestov@usu.ru, Polina.Glazyrina@usu.ru

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

Л. В. Тайков [1] доказал, что на множестве $\mathbf{T}_n$ вещественных тригонометрических полиномов $f_n(t)=a_0+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$ порядка $n\ge 1$ при $q\ge 1$ для любого целого $r\ge 1$ имеет место точное неравенство

$$\|f_n^{(r)}\|_q \le n^r\|\cos nt\|_q\|f_n\|_\infty, \quad f_n\in\mathbf{T}_n. \tag{1}$$

Впрочем, как оказалось, этот результат содержится в более ранней работе [2]. Довольно продолжительное время авторов интересовал вопрос о том, справедливо ли неравенство (1) при $0\le q<1$. Один из результатов сообщения будет состоять в том, что оно действительно имеет место при $0\le q<1$ и не только для целых, но и для дробных производных.

Пусть $\Phi^+=\Phi^+(0,\infty)$ есть класс функций φ, определенных, неубывающих и логарифмически выпуклых на $(0,+\infty)$, а точнее, представимых в виде $\varphi(u)=\psi(\ln u)$, где функция $\psi(v)=\varphi(e^v)$ непрерывна, не убывает и выпукла на $(-\infty,+\infty)$. Функция $\varphi\in\Phi^+$ характеризуется тем, что она на полуоси $(0,\infty)$ локально абсолютно непрерывна и произведение $u\varphi'(u)$ не убывает. Классу Φ^+ принадлежат, например, все неубывающие выпуклые функции, функции u^p при $p>0$, $\ln u$. Класс функций Φ^+ был введен в работе [3] при изучении неравенства Бернштейна и его обобщений в пространствах L_p при $p\in[0,1)$ (и более общих пространствах). В работе [4] была показана естественность этого класса в данной тематике.

Пусть $D^\alpha f_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^\alpha\big(a_k\cos(kt+\alpha\pi/2)+b_k\sin(kt+\alpha\pi/2)\big)$ есть операция дробного дифференцирования в смысле Вейля порядка $\alpha\in\mathbb{R}$ полиномов $f_n\in\mathbf{T}_n$. При вещественном θ определим на множестве $\mathbf{T}_n$ оператор $\Lambda_\theta^\alpha f_n(t)=D^\alpha f_n(t)\cos\theta-D^\alpha\widetilde{f}_n(t)\sin\theta$; этот оператор впервые возник в исследованиях Г. Сеге [5].

Теорема 1. *Пусть $n\ge 1$, $\varphi\in\Phi^+$, $\alpha\ge 1$, $\theta\in\mathbb{R}$. Тогда для всех $f_n\in\mathbf{T}_n$ справедливо точное неравенство*

$$\int_0^{2\pi}\varphi\left(\left|D^\alpha f_n(t)\cos\theta-D^\alpha\widetilde{f}_n(t)\sin\theta\right|\right)dt\le\int_0^{2\pi}\varphi(n^\alpha\|f_n\|_{C_{2\pi}}|\cos t|)\,dt;$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

на полиномах $A\cos(nt+a)$, $A, a \in \mathbb{R}$, *оно обращается в равенство.*

Следствие 1. *Для всех* $n \geq 1$, $\alpha \geq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ *и* $q \in [0,\infty]$ *имеет место точное неравенство*

$$\left\| D^\alpha f_n \cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n \sin\theta \right\|_q \leq n^\alpha \left\|\cos t\right\|_q \left\|f_n\right\|_\infty, \quad f_n \in \mathbf{T}_n, \tag{2}$$

и, в частности, точные неравенства

$$\left\|D^\alpha f_n\right\|_q \leq n^\alpha \left\|\cos t\right\|_q \left\|f_n\right\|_\infty, \quad f_n \in \mathbf{T}_n, \tag{3}$$

$$\left\|D^\alpha \widetilde{f}_n\right\|_q \leq n^\alpha \left\|\cos t\right\|_q \left\|f_n\right\|_\infty, \quad f_n \in \mathbf{T}_n. \tag{4}$$

Неравенство (2) при $q=\infty$ для целых $\alpha \geq 1$ получил Г. Сеге [5]. Как уже было сказано ранее, при $1 \leq q < \infty$ для целых $\alpha \geq 1$ неравенство (3) доказал Л. В. Тайков [1]; однако, оно фактически содержалось в более ранней работе [2]. При $q=\infty$ для вещественных $\alpha \geq 1$ неравенство (3) обосновал П. И. Лизоркин (1965). Неравенство (2), а значит и (4), при $q = \infty$ для дробных производных порядка $\alpha \geq 1$ установил А. И. Козко [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тайков Л. В.* Одно обобщение неравенства С. Н. Бернштейна // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 43–47.

2. *Calderon A. P., Klein G.* On an extremum problem concerning trigonometrical polynomials // Studia Math. 1951. Vol. 12. P. 166–169.

3. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.

4. *Glazyrina P. Yu.* Necessary conditions for metrics in integral Bernstein-type inequalities // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, № 6. P. 1204–1210.

5. *Szegö G* Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schriften Königsberg. 1928. B. 5. S. 59–70.

6. *Kozko A. I.* The exact constants in the Bernstein – Zygmund – Szegö inequalities with fractional derivatives and the Jackson – Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, № 3. P. 391–416.