Теорема 1. *Пусть* $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$ *и* $\limsup\limits_{p\to\infty} I(p) = \infty$. *Тогда на* M *не существует целых положительных решений неравенства* (1).

Кроме того, в работе найдены условия отсутствия целых положительных решений в случае $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$.

Также найдены достаточные условия существования нетривиальных целых положительных решений неравенства (1) и мощность их множества.

Т. П. Лукашенко (Москва)
lukashenko@mail.ru

РЕКУРСИВНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ – СТИЛТЬЕСА[1]

В $[1, 2]$ были введены орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах и в некоторых функциональных пространствах. Рассмотрим рекурсивные разложения Фурье – Стилтьеса на отрезках.

Определение. Пусть функция F непрерывна на $[a, b]$, а φ_k — последовательность функций ограниченной вариации на $[a, b]$, Φ_k — их первообразные, $\Phi_k(a) = 0$. Определим *рекурсивное разложение Фурье – Стилтьеса* функции F по последовательности функций φ_k: 1) $r_0 = F$; 2) если для натурального k задан остаток приближения — непрерывная на $[a, b]$ функция r_{k-1}, то $\widehat{dF}_k = (R-S)\int\limits_I \overline{\varphi_k}\, dr_{k-1}$ и $r_k = r_{k-1} - \widehat{dF}_k\Phi_k$. Ряд $S(dF) = \sum\limits_k \widehat{dF}_k\varphi_k$ — *рекурсивный ряд Фурье – Стилтьеса* (RFS-ряд) F, а $S(F) = \sum\limits_k \widehat{dF}_k\Phi_k$ — *рекурсивный интегрированный ряд Фурье – Стилтьеса* (RIFS-ряд) F.

Пусть $\{v_k\}_{k=o}^{\infty}$ — последовательность различных точек отрезка $[a, b]$, причем $v_0 = a$, $v_1 = b$. Определим ортогональную систему функций φ_k на $[a, b]$: $\varphi_1 \equiv \frac{1}{b-a}$; при $k > 1$ пусть $a_k = \max\{v_j : v_j < v_k,\ j < k\}$, $b_k = \min\{v_j : v_j > v_k,\ j < k\}$, $\varphi_k(x)$ равна 0 при $x \notin [a_k, b_k]$, $\frac{1}{v_k - a_k}$ при $x \in (a_k, v_k)$, $-\frac{1}{b_k - v_k}$ при $x \in (v_k, b_k)$, $\varphi_k(a) = \varphi_k(a+0)$, $\varphi_k(b) = \varphi_k(b-0)$, все точки разрыва φ_k регулярны.

Теорема. *Если* $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ *всюду плотна на* $[a, b]$, *то 1) если* $F(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *то RIFS-ряд* F *равномерно сходится к* $F(x) - F(a)$ *на* $[a, b]$; *2) если* $F(x)$ *непрерывно дифференцируема на* $[a, b]$, *то RFS-ряд* F *равномерно сходится к* $F'(x)$ *на* $[a, b]$; *3) если* $F(x)$ *абсолютно непрерывна на* $[a, b]$ *и* $F'(x) \in \mathrm{L}^p[a, b]$, $1 \leqslant p < \infty$, *то RFS-ряд* F *сходится к* $F'(x)$ *в пространстве* $\mathrm{L}^p[a, b]$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).

То же верно для системы неортогональных функций $\lambda_1 = \varphi_1$, при $k > 1$ $\lambda_{2k-2} = \varphi_k \chi_{[a, v_k)}$, $\lambda_{2k-1} = -\varphi_k \chi_{(v_k, b]}$, где χ — характеристическая функция, v_k — регулярная точка разрыва обеих функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестник Моск. Ун-та. Сер. I. Матем. Механ. 2001. № 1. С. 6–10.

2. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О рекурсивных разложениях по цепочке систем // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 6. С. 1–6.

А. Л. Лукашов (Саратов, Стамбул),
С. В. Тышкевич (Саратов)
alukashov@fatih.edu.tr, s_tyshkevich@yahoo.com

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ НА ОТРЕЗКЕ[1]

Пусть $\mathcal{R}_N^{(A,B,\mathcal{A})}$ — класс рациональных тригонометрических функций вида

$$r_N(\varphi) = \\ = \frac{A\cos\frac{N}{2}\varphi + B\sin\frac{N}{2}\varphi + a_1\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi + \ldots + b_{\left[\frac{N}{2}\right]}\sin\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}},$$

где $N \in \mathbb{N}$, A, $B \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$, — фиксированные числа; $a_1, \ldots, b_{\left[\frac{N}{2}\right]} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\varphi)$ — фиксированный тригонометрический полином порядка $a \leq N$ с действительными нулями, положительный на отрезке $\mathcal{E} = [\alpha_1, \alpha_2]$, $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi$.

В зависимости от α_1 и α_2 минимум в задаче

$$\max_{\varphi\in\mathcal{E}} |r_N^*(\varphi)| = \min_{r_N\in\mathcal{R}_N^{(A,B,\mathcal{A})}} \max_{\varphi\in\mathcal{E}} |r_N(\varphi)|$$

достигается либо рациональной тригонометрической функцией вида [1, theorem 2], либо «эллиптической» функцией [2, corollary 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lukashov A. L.* Exact Solutions of Some Extremal Problems of Approximations Theory // Approximations Theory XIII: San Antonio 2010 (eds. M. Neamtu and L. Schumaker), Springer Proceedings in Mathematics 13, DOI 10.1007/978-1-4614-0772-0_13.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).