На функции необходимо накладывать условие монотонности (хотя бы на исследуемом промежутке), иначе обратное преобразование теряет свойство однозначности. К наименьшим потерям приводят линейные преобразования. Таким образом, искажения при n-мерном линейном преобразовании можно задать формулой:

$$g(X, A) = |X - \lfloor A^{-1} \cdot \lfloor A \cdot X + B + 0,5 \rfloor + D + 0,5 \rfloor|,$$

где $\lfloor . + 0,5 \rfloor$ — функция округления, а матрица A — матрица смены векторного пространства, и $|A| \neq 0$. Если X — непрерывная величина, то функция $G(X, A)$ — периодическая функция, с периодом $P = Ceil[\frac{1}{|A|}]$, т.е. она представима в более короткой форме:

$$f(x, a) = |x|, \quad \left(x \in \left[\frac{-0,5+k}{a}; \frac{0,5+k}{a} \right), \quad k = \lfloor \frac{x}{a} \rfloor, \quad a \in R \backslash \{0\} \right).$$

В тоже время следует обратить внимание, что традиционно поддаются преобразованию не отдельные значения, а целые массивы данных, следовательно, помехи возрастают, и общий уровень потерь изменяется по закону:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \begin{cases} \frac{2k+1}{8a^2} - \frac{x^2}{2}; x \in [\frac{-0,5+k}{a}; \frac{k}{a}) & ; \\ \frac{2k}{8a^2} + \frac{x^2}{2}; x \in [\frac{k}{a}; \frac{0,5+k}{a}) & . \end{cases}$$

И становится задача подбора оптимального преобразования A, что бы потери были минимальными. Исследования показали, что чем ближе матрица A к единичной — тем меньше абсолютный уровень потерь!

О. С. Кудрявцева (Волжский)
kudryavceva@vgi.volsu.ru

ДРОБНОЕ ИТЕРИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ

В терминах функции Кёнигса (см., напр., [1]) исследуется вопрос дробного итерирования (см., напр., [2] и приведённую там библиографию) в классе $\mathfrak{P}_r[0; 1]$, который представляет собой совокупность аналитических функций f, отображающих единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в себя, сохраняющих точки $z = 0$, $z = 1$, обладающих конечной угловой производной в точке $z = 1$ и имеющих вещественные коэффициенты разложения в ряд Маклорена.

Методами, разработанными в [2], получено интегральное представление класса функций Кёнигса, соответствующих функциям $f \in \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$, где $\mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$ – совокупность функций $f \in \mathfrak{P}_r[0;1]$, допускающих дробное итерирование в этом классе.

Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$, тогда её функция Кёнигса F имеет вид*

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^{2/(1+\alpha)}} \exp\left\{ \frac{\alpha}{1+\alpha} \int\limits_{[-1,1]} \ln \frac{1}{1-2xz+z^2}\, d\mu(x) \right\} \qquad (1)$$

с некоторым $\alpha \geqslant 0$ и вероятностной мерой μ на $[-1,1]$. При этом, под степенной функцией и логарифмом понимаются ветви, принимающие значения 1 и 0, соответственно, при $z=0$.

Обратно, всякая функция F вида (1) является функцией Кёнигса для функций $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$, определяемых из равенства

$$f(z) = F^{-1}\left(\beta\, F(z)\right), \quad 0 < \beta < 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М.: ГИТТЛ, 1957. 235 с.

2. *Горяйнов В. В., Кудрявцева О. С.* Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 7. С. 43–74.

И. Ф. Курбыко, С. В. Левизов (Владимир)
levizov@rambler.ru

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

Пусть $0 \leq x \leq 1$ и $\{\varphi_n(x)\}$ — система Уолша (в порядке Пэли) ; $\{n(k)\}$ — некоторая (строго возрастающая) последовательность индексов (номеров). Скажем, что подсистема $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ подчинена закону повторного логарифма (ЗПЛ), если выполнено соотношение:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} (2N \log\log N)^{-1/2} \cdot \sum_{k=1}^{N} \varphi_{n(k)}(x) = 1 \quad \text{почти всюду.} \qquad (1)$$

Известно (см. [1]), что если последовательность $\{n(k)\}$ такова, что, начиная с некоторого номера k_0

$$n(k+1) \geq n(k) \cdot (1 + c \cdot k^{-\alpha}), \quad \text{где } c > 0,\ 0 < \alpha < 0.5, \qquad (2)$$

то для подсистемы $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ соотношение (1) имеет место.